



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

SAON CRISPIM VIEIRA

**SEPARAÇÃO GÁS-LÍQUIDO NO ESCOAMENTO  
BIFÁSICO INTERMITENTE EM UM DUTO  
ANULAR**

CAMPINAS

2018

SAON CRISPIM VIEIRA

# **SEPARAÇÃO GÁS-LÍQUIDO NO ESCOAMENTO BIFÁSICO INTERMITENTE EM UM DUTO ANULAR**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo, na área de Exploração.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Bannwart

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Saon Crispim Vieira e orientada pelo Prof. Dr. Antônio Carlos Bannwart.

---

Assinatura do Orientador

CAMPINAS

2018

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** Não se aplica.

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

V673s      Vieira, Saon Crispim, 1985-  
Separação gás-líquido no escoamento bifásico intermitente em um duto anular / Saon Crispim Vieira. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Antonio Carlos Bannwart.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Escoamento bifásico. 2. Duto anular. I. Bannwart, Antonio Carlos, 1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Gas-liquid separation on the intermittent two-phase flow in a annular duct

**Palavras-chave em inglês:**

Two-phase flow

Annular duct

**Área de concentração:** Exploração

**Titulação:** Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo

**Banca examinadora:**

Antonio Carlos Bannwart [Orientador]

Oscar Mauricio Hernandez Rodriguez

Elisio Caetano Filho

**Data de defesa:** 27-07-2018

**Programa de Pós-Graduação:** Ciências e Engenharia de Petróleo

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

# **SEPARAÇÃO GÁS-LÍQUIDO NO ESCOAMENTO BIFÁSICO INTERMITENTE EM UM DUTO ANULAR**

Autor: Saon Crispim Vieira

Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Bannwart

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Antônio Carlos Bannwart, Presidente  
Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM)  
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Prof. Dr. Oscar Mauricio Hernandez Rodriguez  
Escola de Engenharia de São Carlos (EESC)  
Universidade de São Paulo (USP)

Pesquisador Dr. Elisio Caetano Filho  
CENPES  
PETROBRAS

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 27 de Julho de 2018



## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho aos meus pais Eva e Manoel, à minha irmã Sávila e ao meu amor Nathalia Luiza Andreazza.

## AGRADECIMENTOS

À minha família, embora distante, sempre em meus pensamentos, devo a eles tudo o que sou. Obrigado a meus pais Eva e Manoel e à minha irmã Sávila pelo suporte incondicional durante toda a minha vida.

A Nathalia Luiza Andreazza pelo amor, carinho, incentivo e compreensão. Sem você nada seria possível.

Aos meus amigos que tanto contribuíram nesta jornada, pela amizade, paciência, bons momentos e todo o ócio que me moldaram em quem sou.

Ao Prof. Dr. Antônio Carlos Bannwart pela orientação, confiança e paciência que contribuíram tanto para minha formação.

Ao Prof. Dr. Marcelo Souza de Castro pela amizade, apoio e disposição incondicionais durante o andamento deste trabalho.

Ao Pesquisador Dr. Valdir Estevam pelo enorme apoio e incentivo durante a realização deste trabalho com muito conhecimento e entusiasmo.

Ao Prof. Dr. Adriano Todorovic Fabro pela amizade e enorme contribuição na parte de processamento de sinais.

Aos senhores membros da banca examinadora, Pesquisador Dr. Elisio Caetano Filho e Prof. Dr. Oscar Mauricio Hernandez Rodriguez, pela disponibilidade e indispensáveis contribuições para este trabalho.

A todos os professores da Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP pelos ensinamentos e aos funcionários pelo apoio técnico e ensinamentos que contribuíram tanto para meu desenvolvimento acadêmico e profissional.

À PETROBRAS pela oportunidade, incentivo e apoio financeiro ao projeto de pesquisa que estimulou a realização deste trabalho. Agradeço em especial aos colegas na PETROBRAS Alexandre Machado, Guilherme Paternost, Guilherme Peixoto, Jesulino Santos, Jurandir, Marcos Pellegrini e Pedro Silva.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ciências e Engenharia de Petróleo pela oportunidade de formação e aperfeiçoamento profissional. A todos colegas e amigos do CEPETRO e ALFA *Research Group* por todo o apoio, ajuda, amizade e ótimo ambiente de convívio que tornaram os dias de trabalho mais agradáveis.

"Nenhuma grande descoberta foi feita jamais sem um palpite ousado"

Sir Isaac Newton

## RESUMO

Neste trabalho, investigou-se o fenômeno de separação gás-líquido no escoamento bifásico no interior de dutos anulares, através da realização de experimentos em uma bancada projetada exclusivamente para este fim e com a utilização de técnicas de medição multifásica aliadas ao uso câmeras de alta velocidade.

O projeto da bancada baseou-se em uma análise adimensional e de similaridade dos fenômenos envolvidos, onde enumerou-se os principais números adimensionais que foram mantidos em escala quando comparados à um dispositivo real em operação na PETROBRAS.

Estudou-se o escoamento bifásico intermitente no interior de dutos anulares levemente inclinados em relação à horizontal com o objetivo de estimar a fração de vazio no separador gás-líquido. Foram levantados experimentalmente, a partir do processamento de imagens, os parâmetros geométricos e cinemáticos da célula unitária, o que permitiu a elaboração de um modelo de fluxo de escorregamento específico para o duto anular sob estudo.

As séries de pressão diferencial medidas foram relacionadas às ondas de fração de vazio, em um esforço para justificar o uso destes dados como ferramenta de identificação e caracterização de padrões de escoamento, especialmente úteis quando a visualização do escoamento não é possível, como na operação do dispositivo real. A partir da análise da fase da PSD cruzada entre os sinais de pressão diferencial normalizados, provou-se que há uma região do espectro onde há o acoplamento dos sinais de pressão diferencial com as ondas cinemáticas de fração de vazio (não somente com as ondas sônicas como era previsto), embora sejam necessárias melhorias nos métodos de processamento de sinais empregados.

Os ensaios de separação gás-líquido realizados permitiram associar a eficiência de separação em função das variáveis operacionais da bancada, destacando-se o número de Froude da mistura e a fração de vazio sem escorregamento. Os resultados observados foram qualitativamente coerentes com os reportados na Revisão de Literatura, porém com grandes desvios quantitativos. Portanto, foi proposto um modelo semi-analítico que produziu resultados satisfatórios e fisicamente coerentes.

**Palavras Chave:** Escoamento Bifásico, Duto anular, Padrão Intermitente; Separador Gás-Líquido Anular.

## ABSTRACT

In this work, it was investigated the gas-liquid separation phenomenon in the two-phase flows inside the annular ducts, through experiments in a bench designed exclusively for this purpose employing multiphase measurement techniques allied to the use of high speed cameras.

The bench design was based on a non-dimensional and similarity analysis of the phenomena involved, where it was enumerated the main dimensionless numbers that were kept in scale when compared to a real device in operation at PETROBRAS.

The intermittent two-phase flow was studied inside annular ducts slightly horizontally inclined in order to estimate the void fraction at the gas-liquid separator intake. The geometric and kinematic parameters of the unit cell were experimentally obtained from the acquired images processing, which allowed the proposal of a specific Drift Flux model for the annular duct under study.

The acquired differential pressure time series were related to the void fraction waves, in an effort to justify the usage of these data as a tool aiming the flow patterns's identification and characterization, especially when flow visualization is not possible, as in field service. From the analysis of the phase cross-spectra between normalized differential pressure signals, it was demonstrated that there is a region of the spectrum where the differential pressure signals and the void fraction kinematic waves are coupled (not only with the sonic waves, as expected), although improvements in signal processing methods are needed.

The gas-liquid separation tests allowed to associate the measured separation efficiency according to the bench operating non-dimensional variables, especially the mixture Froude number and the no-slip void fraction. The results observed were qualitatively consistent with those reported in the Literature Review, however with large quantitative deviations. Therefore, a semi-analytical model was proposed that produced satisfactory and physically coherent results.

**Key Word:** Two-phase Flow, Annular Duct, Intermittent Flow Pattern; Annular Gas-Liquid Separator.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1.1</b> – Separação natural em um poço (LIU, 2002) .....	27
<b>Figura 1.2</b> – Degradação de <i>Head</i> em uma BCS (LEA; BEARDEN, 1982b) .....	28
<b>Figura 1.3</b> –BCS operando em <i>surging</i> (MONTE VERDE, 2011).....	28
<b>Figura 1.4</b> – Representação do SKID BCSS (DAUN, 2013) .....	29
<b>Figura 2.1</b> – Sistema de produção com o MOBO (TEIXEIRA et al., 2014).....	32
<b>Figura 2.2</b> – Módulo de Bombeio (MOBO) (TEIXEIRA et al., 2014) .....	32
<b>Figura 2.3</b> – Sistema de <i>boosting</i> SKID BCSS (TARCHA et al., 2016).....	33
<b>Figura 2.4</b> - Campo com um SKID BCSS (COSTA; OLIVEIRA; ROBERTO, 2013) .....	34
<b>Figura 2.5</b> – Protótipo do SKID BCSS no sítio de testes de Atalaia (COSTA; OLIVEIRA; ROBERTO, 2013) .....	34
<b>Figura 2.6</b> – PDF's observadas em diferentes escalas para o padrão intermitente e correlação cruzada (MATSUI, 1984).....	36
<b>Figura 2.7</b> – Fluxograma de identificação do padrão de escoamento ar-água para dutos anulares horizontais ou levemente inclinados (MENDES, 2012) .....	37
<b>Figura 2.8</b> – PSD do escoamento no padrão intermitente (MENDES, 2012) .....	38
<b>Figura 2.9</b> – Célula Unitária (TAITEL; BARNEA, 1990) .....	39
<b>Figura 2.10</b> - Percentual de gás sugado pela bomba centrífuga (LEA; BEARDEN, 1982a) ..	43
<b>Figura 2.11</b> – Aparato Experimental (ALHANATI, 1993) .....	44
<b>Figura 2.12</b> – Aparato experimental (VILORIA, 1999).....	45
<b>Figura 2.13</b> – Trajetória das bolhas (LIU, 2002; LIU; PRADO, 2001) .....	46
<b>Figura 2.14</b> – Seção do anular e círculo de separação (LIU, 2002; LIU; PRADO, 2001) .....	46
<b>Figura 2.15</b> – Função corrente para a fase gasosa (MARQUEZ, 2004).....	47
<b>Figura 2.16</b> – Volume de Controle para o separador vertical.....	50
<b>Figura 2.17</b> – Volume de Controle do Separador.....	52
<b>Figura 2.18</b> – Volumes de Controle para a análise proposta por Márquez (2004).....	59
<b>Figura 2.19</b> – Geometria da bolha distorcida .....	62
<b>Figura 2.20</b> – Balanço de forças em uma bolha perfeitamente esférica em um meio estático e infinito. ....	62
<b>Figura 2.21</b> – Comportamento do arrasto em função do número de Eötvos (HARMATHY, 1960).....	64
<b>Figura 3.1</b> – Mapa da geometria das bolhas (CLIFT; GRACE; WEBER, 1978). ....	79

<b>Figura 3.2</b> – Geometria da cápsula do SKID BCSS .....	82
<b>Figura 3.3</b> – Densidade de soluções aquosas de glicerina (SEGUR, 1953) .....	85
<b>Figura 3.4</b> – Viscosidade de soluções aquosas de glicerina (SEGUR, 1953) .....	85
<b>Figura 3.5</b> – Tensão superficial de soluções aquosas de glicerina (SEGUR, 1953) .....	86
<b>Figura 3.6</b> – Mapa de padrões de escoamento e a matriz de testes (quadrados pretos). .....	88
<b>Figura 3.7</b> – Dutos de acrílico (CENTRAL DO ACRILICO, 2018).....	89
<b>Figura 3.8</b> – Representação da bancada .....	90
<b>Figura 3.9</b> – Centralizadores do tubo interno, elemento 14 na Figura 3.8 e Tabela 3.9.....	92
<b>Figura 3.10</b> – Desenho mecânico da bancada com cotas. ....	92
<b>Figura 3.11</b> – Desenho mecânico 3D da Bancada. ....	93
<b>Figura 3.12</b> – Desenho da cápsula em detalhe. ....	93
<b>Figura 3.13</b> – Bancada experimental construída. ....	94
<b>Figura 3.14</b> – Layout do aparato experimental.....	95
<b>Figura 3.15</b> – Equipamentos da linha de líquidos. (a) Tanque de Líquido, (b) Booster WEG®, (c) Booster NETZSCH®, (d) Variadores de frequência CFW 11 e CFW 09 (e) Reciclo de líquido.....	96
<b>Figura 3.16</b> – Medidores de vazão mássica de líquido: (a) alta vazão – Emerson, (b) baixa vazão – Metroval. ....	97
<b>Figura 3.17</b> – Equipamentos que compõem a linha de ar: (a) Compressor de ar - Ingersoll Rand, (b) Vasos de ar comprimido - Ingersoll Rand, (c) Regulador de pressão - Micro, (d) Medidor de vazão mássica - Micro Motion, (e) Válvula controladora de ar - HORA Regelarmaturen e (f) ) Anel de injeção de ar.....	98
<b>Figura 3.18</b> – Válvula <i>choke</i> Fisher.....	99
<b>Figura 3.19</b> – Equipamentos de aquisição de sinais: (a) Chassi NI 9272, (b) Módulos de aquisição de sinais. ....	101
<b>Figura 3.20</b> – P&ID da bancada. ....	102
<b>Figura 3.21</b> – Desenho da bancada instrumentada. ....	102
<b>Figura 3.22</b> – Sensores de pressão. (a) Rosemount 2088 A, (b) Validyne DP15, (c) SMAR LD 301. ....	103
<b>Figura 3.23</b> – Aquisição de sinais dos transdutores Validyne: (a) Demodulador Validyne CD-23, (b) NI USB 6000. ....	104
<b>Figura 3.24</b> – Instrumento de temperatura (PT100). ....	105
<b>Figura 3.25</b> – Interface gráfica do programa de aquisição de dados. ....	105

<b>Figura 3.26</b> – Esquema de iluminação. ....	106
<b>Figura 3.27</b> – Curva de aferição dos sensores de pressão manométrica Rosemount. ....	109
<b>Figura 3.28</b> – Curva de aferição dos sensores de pressão diferencial Validyne.....	109
<b>Figura 3.29</b> – Curva de aferição do transdutor de pressão diferencial SMAR.....	110
<b>Figura 3.30</b> – Curva de aferição do sensor de temperatura PT – 100. ....	110
<b>Figura 4.1</b> - Padrões de escoamento pra um duto anular vertical (CAETANO; SHOHAM; BRILL, 1992b) .....	115
<b>Figura 4.2</b> – Trem de pulsos quadrados representando o transporte da célula unitária.....	117
<b>Figura 4.3</b> - Função $\text{sinc}(x)$ com $-15 < x < 15$ . ....	123
<b>Figura 4.4</b> – Sonda de pressão diferencial no duto anular.....	125
<b>Figura 4.5</b> – Onda de pressão transportada .....	125
<b>Figura 4.6</b> – Diagrama de blocos do problema de eco .....	127
<b>Figura 4.7</b> – Superposição de diferentes ecos devidos a diferentes velocidades de propagação .....	128
<b>Figura 4.8</b> – Evolução da célula unitária e parâmetros geométricos e cinemáticos da Célula Unitária .....	129
<b>Figura 4.9</b> – Regiões de interesse por tomada de pressão enumeradas para a obtenção da função indicadora de fase .....	130
<b>Figura 4.10</b> – Dados experimentais (+) de velocidade de ascensão da bolha de Taylor <i>VTB</i> em função da velocidade de mistura <i>jm</i> comparados com modelos da literatura.....	132
<b>Figura 4.11</b> – Dados médios de velocidade comparados com modelos da literatura.....	133
<b>Figura 4.12</b> – Comparação entre os dados brutos de velocidade e o ajuste .....	134
<b>Figura 4.13</b> – Histograma do comprimento do pistão de líquido adimensional.....	135
<b>Figura 4.14</b> – Número de Froude da golfada experimental bruto .....	136
<b>Figura 4.15</b> – Número de Froude da golfada experimental médios (pontos) comparados com Zabaras (2000) (superfície) .....	137
<b>Figura 4.16</b> – Ajuste dos dados experimentais .....	138
<b>Figura 4.17</b> – Ajuste dos dados experimentais .....	140
<b>Figura 4.18</b> – Ponto 1 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	141



<b>Figura 4.19</b> – Ponto 2 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	142
<b>Figura 4.20</b> – Ponto 3 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	142
<b>Figura 4.21</b> – Ponto 4 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	143
<b>Figura 4.22</b> – Ponto 5 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	143
<b>Figura 4.23</b> – Ponto 6 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	144
<b>Figura 4.24</b> – Ponto 7 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	144
<b>Figura 4.25</b> – Ponto 8 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	145
<b>Figura 4.26</b> – Ponto 9 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	145
<b>Figura 4.27</b> – Ponto 10 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	146
<b>Figura 4.28</b> – Ponto 1 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	147
<b>Figura 4.29</b> – Ponto 2 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa) .....	147

<b>Figura 4.30</b> – Ponto 3 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa).....	148
<b>Figura 4.31</b> – Ponto 4 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa).....	148
<b>Figura 4.32</b> – Ponto 5 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa).....	149
<b>Figura 4.33</b> – Ponto 6 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa).....	149
<b>Figura 4.34</b> – Ponto 7 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa).....	150
<b>Figura 4.35</b> – Ponto 8 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa).....	150
<b>Figura 4.36</b> – Ponto 9 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa).....	151
<b>Figura 4.37</b> – Ponto 10 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa).....	151
<b>Figura 4.38</b> – Ponto 1 da matriz de testes (Tabela 4.1): pacote de onda relativo à passagem de uma célula unitária.....	152
<b>Figura 4.39</b> – Ponto 5 da matriz de testes (Tabela 4.1): pacote de onda relativo à passagem de uma célula unitária.....	153
<b>Figura 4.40</b> – Ponto 10 da matriz de testes (Tabela 4.1): pacote de onda relativo à passagem de uma célula unitária.....	153
<b>Figura 4.41</b> – Ponto 1 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.....	154

<b>Figura 4.42</b> – Ponto 2 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.....	154
<b>Figura 4.43</b> – Ponto 3 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.....	155
<b>Figura 4.44</b> – Ponto 4 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.....	155
<b>Figura 4.45</b> – Ponto 5 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.....	156
<b>Figura 4.46</b> – Ponto 6 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.....	156
<b>Figura 4.47</b> – Ponto 7 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.....	157
<b>Figura 4.48</b> – Ponto 8 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.....	157
<b>Figura 4.49</b> – Ponto 9 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.....	158
<b>Figura 4.50</b> – Ponto 10 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.....	158
<b>Figura 4.51</b> – Velocidades das Ondas Cinemáticas .....	160
<b>Figura 5.1</b> — Visualização 3D da nuvem dos pontos experimentais.....	162
<b>Figura 5.2</b> – Eficiências de Separação Experimentais.....	162
<b>Figura 5.3</b> – Comparação dos dados experimentais (+) com o modelo de Alhanati (1993) (o). .....	163
<b>Figura 5.4</b> – Visualização 3D do escorregamento radial médio $vsr$ estimado em função do número de Froude da mistura e da fração de vazios sem escorregamento.....	164
<b>Figura 5.5</b> – Escorregamento radial médio $vsr$ estimado em função do número de Froude da mistura .....	165
<b>Figura 5.6</b> –Volume de Controle. ....	166
<b>Figura 5.7</b> –Escorregamento radial em função da velocidade superficial da mistura. ....	186
<b>Figura 5.8</b> – Escorregamento em função do número de Froude bifásico e fração de vazio..	187
<b>Figura 5.9</b> – Ajuste do modelo em relação aos dados experimentais.....	188
<b>Figura 5.10</b> –Escoamento no duto anular para o ponto 15 da matriz de testes (Tabela 4.1).	189
<b>Figura 5.11</b> –Escoamento no <i>intake</i> para o ponto 15 da matriz de testes (Tabela 4.1). .....	190

<b>Figura 5.12</b> –Escoamento no <i>intake</i> para o ponto 4 da matriz de testes (Tabela 4.1). ....	190
<b>Figura 5.13</b> –Escoamento no <i>intake</i> para o ponto 13 da matriz de testes (Tabela 4.1). ....	191
<b>Figura 5.14</b> –Escoamento no <i>intake</i> para o ponto 23 da matriz de testes (Tabela 4.1). ....	191
<b>Figura 5.15</b> – Escoamento no duto anular para o ponto 28 da matriz de testes (Tabela 4.1). .....	191
<b>Figura 5.16</b> –Escoamento no <i>intake</i> para o ponto 28 da matriz de testes (Tabela 4.1). ....	192
<b>Figura B.1.-</b> Sinal real e simétrico no tempo com atraso puro (SHIN; HAMMOND, 2008) . .....	222
<b>Figura B.2</b> – Formulação do problema de eco (SHIN; HAMMOND, 2008).....	222
<b>Figura B.3</b> – Magnitudes do sinal e sobreposição com atraso (SHIN; HAMMOND, 2008)	223
<b>Figura B.4.-</b> Representação do arranjo experimental utilizando duas sondas de pressão diferencial em três tomadas. ....	224
<b>Figura B.5</b> – Comportamento da auto correlação da pressão diferencial (SHIN; HAMMOND, 2008).....	225
<b>Figura B.6</b> – Diagrama de bloco dos sinais de pressão diferencial .....	228
<b>Figura B.7</b> – Diagrama de bloco dos sinais de pressão diferencial com ruído turbulento ....	229

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 3.1</b> – Dados operacionais do poço real usado como referência (fonte: Petrobras).....	82
<b>Tabela 3.2</b> – Dimensões aproximadas do SKID BCSS (fonte: Petrobras).....	83
<b>Tabela 3.3</b> – Propriedades da solução aquosa com 32% wt de glicerina (SEGUR, 1953).....	84
<b>Tabela 3.4</b> – Dimensões da bancada projetada.....	86
<b>Tabela 3.5</b> – Matriz de testes preliminar com 30 pontos experimentais .....	87
<b>Tabela 3.6</b> – Número de Reynolds da mistura para a matriz de testes .....	87
<b>Tabela 3.7</b> – Número de Froude da mistura para a matriz de testes .....	87
<b>Tabela 3.8</b> – Dimensões da bancada construída comparadas com a projetada .....	89
<b>Tabela 3.9</b> - Descrição dos itens da bancada .....	91
<b>Tabela 3.10</b> – Equipamentos utilizados no aparato experimental. ....	100
<b>Tabela 3.11</b> – Sensores de pressão e localização das tomadas em relação a Figura 3.12 .....	103
<b>Tabela 3.12</b> – Instrumentação utilizada no aparato experimental. ....	107
<b>Tabela 3.13</b> – Matriz de testes: medidores de vazão mássica utilizados .....	111
<b>Tabela 4.1</b> –Matriz de testes: 28 pontos experimentais.....	130
<b>Tabela 4.2</b> – Velocidades das Ondas Cinemáticas .....	159
<b>Tabela 5.1</b> – Ajuste do modelo em relação aos dados experimentais .....	188

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BCS	Bombeio Centrífugo Submerso ou Bomba Centrífuga Submersa
BCSS	Bombeio Centrífugo Submerso Submarino
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
PVT	Pressão-volume-temperatura
MOBO	Módulo de Bombeio
ANM	Árvore de Natal Molhada
SKID BCSS	BCSS alojada em um Skid no leito marinho
TLD	Teste de Loga Duração
PDF	<i>Probability Density Function</i>
EMD	<i>Empirical Mode Decomposition</i>
AOK TFR	<i>Adaptive Optimal Kernel Time–Frequency Representation</i>
PSD	<i>Power Spectral Density</i>
ID	<i>Inside Diameter</i>
OD	<i>Outside Diameter</i>
FRF	Função de Resposta em Frequência
STFT	<i>Short Time Fourier Transform</i>
SI	Sistema Internacional de Unidades
ROI	<i>Region of Interest</i>
ALFA	<i>Artificial Lift &amp; Flow Assurance Research Group</i>
CEPETRO	Centro de Estudos de Petróleo
FEM	Faculdade de Engenharia Mecânica
LabPetro	Laboratório Experimental de Petróleo “Dr. Kelsen Valente Serra”
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Letras Romanas

$E$	Eficiência de separação	$[-]$
$\bar{E}$	Eficiência de separação média	$[-]$
$Re_m$	Número de Reynolds da mistura	$[-]$
$Fr_m$	Número de Froude da mistura	$[-]$
$Fr_{slug}$	Número de Froude da golfada	$[-]$
$g$	Aceleração da gravidade	$[m/s^2]$
$g_r$	$g$ projetado na direção radial	$[m/s^2]$
$g_z$	$g$ projetado na direção axial	$[m/s^2]$
$\theta$	Inclinação do duto anular em relação à horizontal	$[rad]$
$r$	Direção $r$ de um sistema de coordenadas cilíndricas	$[m]$
$z$	Direção $z$ de um sistema de coordenadas cilíndricas	$[m]$
$L_T$	Comprimento total da cápsula	$[m]$
$L_D$	Comprimento do duto de seção circular	$[m]$
$L_{AN1}$	Comprimento do duto anular 1	$[m]$
$L_{AN2}$	Comprimento do duto anular 2 – jusante da última perturbação	$[m]$
$L_{Top}$	Comprimento do topo não drenado do duto anular	$[m]$
$L_s$	Comprimento entre as tomadas de pressão diferencial	$[m]$
$x_1$	Posição da tomada 1 de pressão diferencial	$[m]$
$x_2$	Posição da tomada 2 de pressão diferencial	$[m]$
$a$	Metade de $L_s$	$[m]$
$L_h$	Elevação vertical do duto anular	$[m]$
$D_i$	Diâmetro interno	$[m]$
$D_e$	Diâmetro externo	$[m]$
$r_i$	Raio interno	$[m]$
$r_e$	Raio externo	$[m]$
$h$	Comprimento do volume de controle do separador no <i>intake</i>	$[m]$
$D_H$	Diâmetro hidráulico equivalente	$[m]$
$r_a$	Razão de aspecto do duto anular	$[-]$

$D_{eq}$	Diâmetro equipерiférico	[m]
$S_{mol}$	Perímetro molhado	[m]
$A$	Área do duto anular	[m <sup>2</sup> ]
$D_p$	Diâmetro das portas do intake	[m]
$A_p$	Área total das portas do intake	[m <sup>2</sup> ]
$Q_g$	Vazão de gás no duto anular	[m <sup>3</sup> /s]
$Q_l$	Vazão de líquido no duto anular	[m <sup>3</sup> /s]
$Q_{gs}$	Vazão de gás sugada pela BCS	[m <sup>3</sup> /s]
$Q_{ls}$	Vazão de líquido sugada pela BCS	[m <sup>3</sup> /s]
$Q_{gv}$	Vazão de gás que migra para o topo	[m <sup>3</sup> /s]
$Q_{lv}$	Vazão de líquido que migra para o topo	[m <sup>3</sup> /s]
$V_{TOPO}$	Volume de gás acumulado no topo do anular	[m <sup>3</sup> ]
$V_{ANULAR}$	Vazão totalizada de gás injetada no duto anular	[m <sup>3</sup> ]
$t_d$	Tempo de drenagem do líquido no topo do anular	[s]
$k$	Identificador de fase -1 para líquida e 2 para gasosa	[—]
$j_m$	Velocidade da mistura definida para o centro de volume	[m/s]
$j_k$	Velocidade superficial da fase $k$	[m/s]
$j_{kr}$	Velocidade superficial radial da fase $k$ no intake	[m/s]
$j_{kz}$	Velocidade superficial axial da fase $k$ no intake	[m/s]
$v_k$	Velocidade in situ da fase $k$	[m/s]
$\overline{v_k}$	Velocidade média in situ da fase $k$	[m/s]
$v'_k$	Perturbação entorno de $\overline{v_k}$	[m/s]
$v_{kr}$	$v_k$ na direção radial	[m/s]
$v_{kz}$	$v_k$ na direção axial	[m/s]
$v_s$	Velocidade relativa entre as fases gasosa e líquida	[m/s]
$v_{sr}$	$v_s$ na direção radial	[m/s]
$\overline{v_{sr}}$	$v_{sr}$ média	[m/s]
$\overline{v_{sr}}^0$	$v_{sr}$ média com vazão de mistura nula	[m/s]
$\overline{v_{sr}}^\infty$	$v_{sr}$ média assintótico quando a vazão de mistura tende ao infinito	[m/s]
$v_{sz}$	$v_s$ na direção axial	[m/s]
$v_r$	Velocidade relativa da onda em relação à velocidade de mistura	[m/s]
$V_{km}$	Velocidade de difusão para uma fase $k$	[m/s]



$V_m$	Velocidade de mistura para o centro de massa	[m/s]
$V_0$	Velocidade ponderada pelas massas específicas de cada fase	[m/s]
$V_w$	Velocidade da onda cinemática	[m/s]
$C_0$	Coeficiente de distribuição	[—]
$\tilde{V}_{2J}$	Fluxo de escorregamento	[m/s]
$V_\infty$	Velocidade de uma bolha em um meio infinito e estacionário	[m/s]
$V_{\infty z}$	$V_\infty$ projetada na direção axial	[m/s]
$V_{\infty r}$	$V_\infty$ projetada na direção radial	[m/s]
$V_{\infty e}$	$V_\infty$ de uma bolha perfeitamente esférica	[m/s]
$V_{TB}$	Velocidade da bolha de Taylor	[m/s]
$V_{\infty TB}$	$V_{TB}$ em um meio infinito e estacionário	[m/s]
$L_U$	Comprimento da célula unitárias	[m]
$L_S$	Comprimento do pistão de líquido aerado	[m]
$L_F$	Comprimento da bolha de Taylor	[m]
$f_u$	Frequência da Célula Unitária	[Hz]
$\beta$	Fator de intermitência	[—]
$C_1$	Número de Froude da bolha de Taylor	[—]
$D^\alpha$	Coeficiente de difusão	[m <sup>2</sup> /s]
$C_d$	Coeficiente de arrasto de uma bolha distorcida	[—]
$C_d^*$	Coeficiente de arrasto para um enxame de bolhas esféricas	[—]
$C_{d\infty}$	Coeficiente de arrasto de somente uma bolha esférica	[—]
$C'_A$	Coeficiente de arrasto de um padrão de escoamento	[—]
$C'_{MA}$	Coeficiente de massa adicionada de um padrão de escoamento	[—]
$C'_B$	Coeficiente de Basset de um padrão de escoamento	[—]
$C_A^\infty$	$C'_A$ definido para uma bolha isolada	[—]
$C_{MA}^\infty$	$C'_{MA}$ definido para uma bolha isolada	[—]
$C_B^\infty$	$C'_B$ definido para uma bolha isolada	[—]
$\Delta C^\infty$	A diferença $C_{MA}^\infty - C_B^\infty$ definida para uma bolha isolada	[—]
$F_d$	Força de arrasto em uma bolha	[N]
$F_{dz}$	$F_d$ projetada na direção vertical	[N]
$F_{dr}$	$F_d$ projetada na direção radial	[N]
$F_e$	Força de empuxo em uma bolha	[N]

$F_p$	Peso de uma bolha	[N]
$A_d$	Área transversal de uma bolha	[m <sup>2</sup> ]
$r_d$	Raio equivalente de uma bolha	[m]
$D_b$	Diâmetro de uma bolha	[m]
$B_d$	Volume de uma bolha	[m <sup>3</sup> ]
$p$	Pressão	[Pa]
$\bar{p}$	Pressão média relativa ao estado base	[Pa]
$p'$	Perturbação entorno de $\bar{p}$	[Pa]
$M_k$	Transferência de momento interfacial recebida pela fase k	[Pa/m]
$M_{kr}$	$M_k$ projetado na direção radial	[Pa/m]
$M_{kz}$	$M_k$ projetado na direção axial	[Pa/m]
$M_k^A$	$M_k$ devido a força de arrasto	[Pa/m]
$M_k^{MA}$	$M_k$ devido a força de massa adicionada	[Pa/m]
$M_k^B$	$M_k$ devido a força de Basset	[Pa/m]
$F_k$	Forças externas por unidade de volume aplicadas a fase k	[N/m <sup>3</sup> ]
$F_w$	Forças externas por unidade de volume aplicadas aplicada na parede	[N/m <sup>3</sup> ]
$f$	Forças líquidas externas sob a mistura	[N/m <sup>3</sup> ]
$f'$	Perturbação de $f$ entorno do estado base	[N/m <sup>3</sup> ]
$A_n$	Amplitude modal das oscilações de fração de vazio	[—]
$P_n$	Amplitude modal das oscilações de pressão	[Pa]
$k_n$	Número de onda	[1/m]
$k_{nR}$	Parte real de $k_n$	[1/m]
$k_{nI}$	Parte imaginária de $k_n$	[1/m]
$c_p$	Velocidade de fase	[m/s]
$C_f$	Fator de fricção de Fanning	[—]
$\Delta P(t)$	Série de pressão diferencial	[Pa]
$\overline{\Delta P}$	Média de $\Delta P(t)$	[Pa]
$P_{T1}$	Pressão absoluta na tomada 1 de pressão diferencial	[Pa]
$P_{T2}$	Pressão absoluta na tomada 2 de pressão diferencial	[Pa]
$c$	Velocidade de propagação da onda de pressão	[m/s]
$\Delta T$	Tempo de trânsito da onda de pressão	[s]
$p(t)$	Série temporal da pressão absoluta na tomada 1	[Pa]

$p'(t)$	$P_{T1}$ adimensional e normalizada	[—]
$\Delta p'(t)$	Diferença de $p'(t)$ entre duas tomadas de pressão	[—]
$R_{\Delta\Delta}(\tau)$	Função de autocorrelação de $\Delta p'(t)$	[—]
$R_{\Delta_1\Delta_2}(\tau)$	Função de correlação cruzada de $\Delta p'(t)$	[—]
$R_{pp}(\tau)$	Função de autocorrelação de $p'(t)$	[—]
$R_{\eta\eta}(\tau)$	Função de autocorrelação de $\eta'(t)$	[—]
$S_{\Delta\Delta}(f)$	Transformada de Fourier de $R_{\Delta\Delta}(\tau)$	[—]
$S_{pp}(f)$	Transformada de Fourier de $R_{pp}(\tau)$	[—]
$S_{\eta\eta}(f)$	Transformada de Fourier de $R_{\eta\eta}(\tau)$	[—]
$S_{\Delta_1\Delta_2}(f)$	Transformada de Fourier de $R_{\Delta_1\Delta_2}(\tau)$	[—]
$H(f, \Delta T_1)$	Função de resposta em frequência entre os diferenciais de pressão	[—]
$G(f, \Delta T_1)$	Função de resposta em frequência considerando o ruído	[—]
$C_{\Delta_2\Delta_1}(f)$	Função de coerência ordinária	[—]

## Letras Gregas

$\varepsilon$	Razão de aspecto entre a bancada e o SKID BCSS real	[—]
$\lambda$	Fração de vazio sem escorregamento	[—]
$\chi$	Função indicadora de fase	[—]
$\alpha_k$	Fração volumétrica <i>in situ</i> da fase $k$	[—]
$\alpha$	Fração de vazio <i>in situ</i>	[—]
$\rho_k$	Massa específica da fase $k$	$[kg/m^3]$
$\Delta\rho$	Diferença entre as massas específicas das fases	$[kg/m^3]$
$\rho_m$	Massa específica da mistura	$[kg/m^3]$
$\overline{\rho_m}$	Massa específica média da mistura	$[kg/m^3]$
$\mu_k$	Viscosidade da fase $k$	$[Pa\ s]$
$\mu_m$	Viscosidade da mistura	$[Pa\ s]$
$\overline{\mu_m}$	Viscosidade média da mistura	$[Pa\ s]$
$\sigma$	Tensão interfacial	$[N/m]$
$\alpha_p$	Fração de vazio <i>in situ</i> nas portas do <i>intake</i>	[—]
$\epsilon$	Fator de forma de uma bolha	[—]

$\bar{\alpha}$	Fração de vazio média	[—]
$\alpha'$	Oscilação da fração de vazio entorno da média	[—]
$\alpha_F$	Fração de vazio na região da bolha de Taylor	[—]
$\alpha_S$	Fração de vazio no pistão de líquido	[—]
$\omega_n$	Frequência	[Hz]
$\omega_{nR}$	Parte real de $\omega_n$	[Hz]
$\omega_{nI}$	Parte imaginária de $\omega_n$	[Hz]
$\psi$	Desvio entre as frações de vazio no duto anular e <i>intake</i>	[—]
$\eta(t)$	Ruído turbulento adicionado ao sinal de pressão	[Pa]
$\delta\alpha(t)$	Série de pressão diferencial adimensional normalizada	[rad]
$\eta'(t)$	$\eta(t)$ adimensional e normalizado	[—]
$\Gamma_k$	Transferência de massa entre as fases	[kg/s]
$\varphi$	Fase do espectro de pressão diferencial	[rad]
$\gamma$	Razão de aspecto entre as tomadas de pressão	[—]

# SUMÁRIO

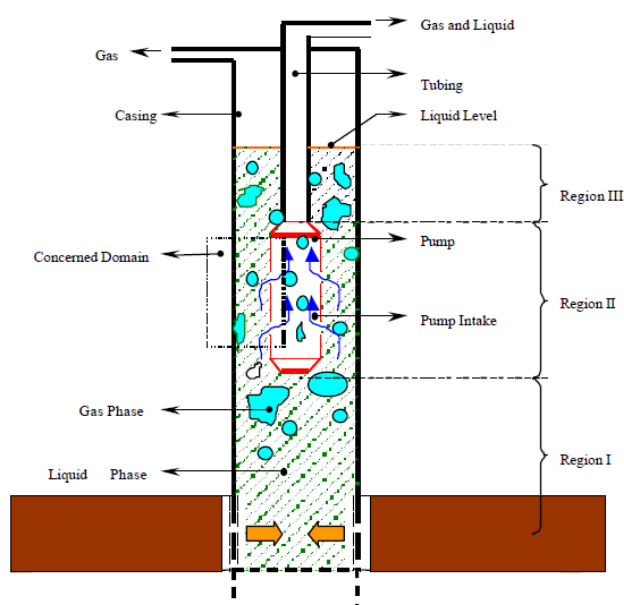
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>27</b>
1.1	Objetivos .....	29
1.2	Estrutura da Dissertação .....	30
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA .....</b>	<b>31</b>
2.1	SKID BCSS .....	31
2.2	Assinatura temporal do sinal de pressão diferencial .....	35
2.3	Escoamento Bifásico Intermitente em Dutos Anulares .....	39
2.4	Separação Natural em Dutos Anulares .....	43
2.5	Modelagem da Separação Natural .....	48
2.6	Velocidade de Ascensão de uma Bolha .....	61
2.7	Estimativa do Escorregamento Radial .....	65
<b>3</b>	<b>APARATO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>74</b>
3.1	Análise Dimensional .....	74
3.2	Bancada Experimental .....	89
3.2.1	Sistema de Suprimento de Fluidos .....	94
3.2.2	Instrumentação e Aquisição de Dados .....	100
3.2.3	Sistema de Visualização .....	106
3.2.4	Aferição dos Instrumentos .....	107
3.2.5	Procedimentos Experimentais .....	111
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DO ESCOAMENTO BIFÁSICO INTERMITENTE EM DUTOS ANULARES .....</b>	<b>115</b>
4.1	Escoamento Intermitente .....	115
4.2	Modelo Homogêneo .....	119
4.3	Sonda de Pressão Diferencial .....	124
4.4	Resultados .....	128

<b>5</b>	<b>SEPARADOR GÁS-LÍQUIDO ANULAR INCLINADO .....</b>	<b>161</b>
5.1	Resultados .....	161
5.2	Modelo de Escorregamento para o Separador Gás-Líquido Anular Inclinado.....	166
5.3	Visualização do Escoamento .....	189
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>193</b>
6.1	Conclusões .....	193
6.2	Recomendações .....	195
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>198</b>
	<b>APÊNDICE A. MODELO DE MISTURA .....</b>	<b>205</b>
APÊNDICE A.1	Onda Cinemática .....	206
APÊNDICE A.2	Equações de Transporte Linearizadas .....	207
APÊNDICE A.3	Acoplamento entre as flutuações de fração de vazio e de pressão .....	209
APÊNDICE A.4	Velocidade da onda de fração de vazio .....	212
	<b>APÊNDICE B. DETECÇÃO DE ATRASO EM SINAIS DE PRESSÃO .....</b>	<b>221</b>
APÊNDICE B.1	Espectrograma .....	230
APÊNDICE B.2	Envelope de um Sinal .....	231

# 1 INTRODUÇÃO

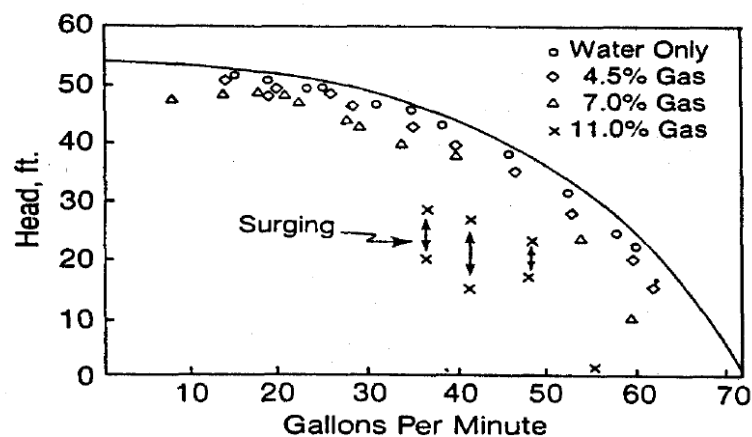
Os métodos de elevação artificial são empregados para viabilizar ou incrementar o transporte de fluidos em poços de petróleo, porém, como nestes sistemas os escoamentos são multifásicos, pode haver segregação de fluidos induzida pela geometria ou condições operacionais dos equipamentos que podem levar a instabilidades e a degradação de eficiência dos métodos de elevação artificial empregados.

Portanto, faz-se necessário o conhecimento dos processos de separação de fluidos, pois tal segregação leva ao acúmulo de gás no topo do sistema sob análise, configurando um nível dinâmico que pode oscilar dependendo das condições de operação do sistema sob análise (VIEIRA, 2011). Tais oscilações podem levar a variações bruscas na interface gás-líquido, das vazões e frações volumétricas das fases, cenário ilustrado na Figura 1.1 para um poço produtor de petróleo.

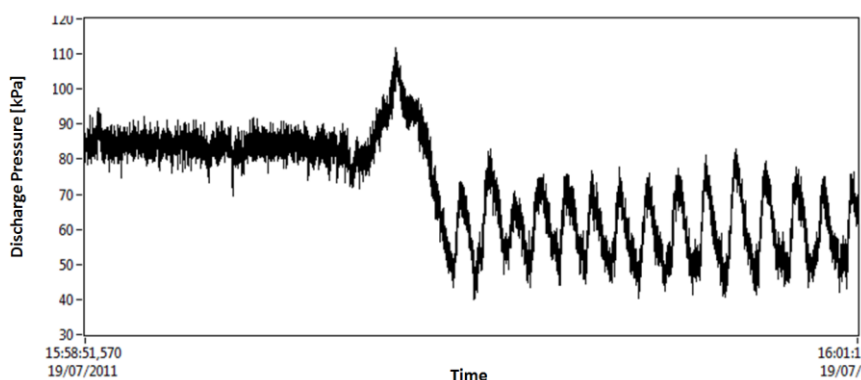


**Figura 1.1** – Separação natural em um poço (LIU, 2002)

As instabilidades supracitadas são críticas se o método de elevação empregado for o Bombeio Centrífugo Submerso (BCS), pois sob a presença de gás livre, este método apresenta degradação de desempenho como exibido na curva de *Head* da bomba centrífuga expressa na Figura 1.2 e instabilidades nos parâmetros operacionais conhecidas como *surging*, ilustradas na Figura 1.3 (LEA; BEARDEN, 1982b; MONTE VERDE, 2011).



**Figura 1.2** – Degradação de *Head* em uma BCS (LEA; BEARDEN, 1982b)



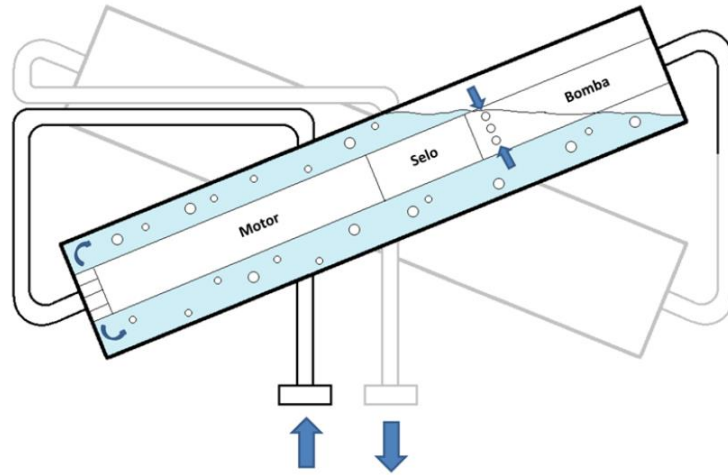
**Figura 1.3** –BCS operando em *surging* (MONTE VERDE, 2011)

O *surging* se caracteriza por oscilações nas vazões e pressões diferenciais decorrentes da operação multifásica de bombas centrífugas, este fenômeno deve-se ao desequilíbrio dinâmico entre a curva de desempenho degradada da bomba centrífuga e a curva do sistema onde esta opera. Quando opera em *surging*, a velocidade relativa das bolhas de gás é praticamente nula em relação ao impelidor da bomba, dada a dinâmica do escoamento no impelidor cujo campo centrífugo acelera mais a fase líquida, o que provoca o acúmulo da fase gasosa podendo levar à total interrupção do fluxo, fenômeno conhecido com *gas lock* (ESTEVAM, 2002).

No *SKID BCSS*, a BCSS é alojada no leito marinho à jusante da Árvore de Natal Molhada (ANM) e levemente inclinada em relação à horizontal (Figura 1.4). Esta localização resulta em uma menor pressão de operação, levando à maiores frações de gás livre na admissão.



Tal crescimento da fração de gás livre, tende a intensificar a segregação gás-líquido tornando o *surging* mais provável.



**Figura 1.4** – Representação do SKID BCSS (DAUN, 2013)

## 1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo estudar experimentalmente o escoamento bifásico na admissão dos sistemas de bombeamento submarino do tipo *SKID BCSS*. Será avaliado o escoamento bifásico no duto anular formado entre a cápsula e a BCS visando estudar os fenômenos de segregação de fluidos na admissão da bomba, utilizando técnicas de visualização e medição multifásicas. Os objetivos específicos são:

- Desenvolver um aparato experimental capaz de reproduzir condições de campo através de uma análise adimensional;
- Visualizar e caracterizar experimentalmente o escoamento no duto anular à montante da admissão;
- Visualizar e caracterizar experimentalmente o fenômeno de separação gás-líquido na admissão;
- Desenvolver um modelo que descreva o processo de separação gás-líquido em um duto anular horizontal levemente inclinado;
- Estudar a viabilidade do uso da assinatura temporal do sinal de pressão diferencial adquirido no duto anular à montante da admissão, como ferramenta para detecção de um escoamento intermitente;

## **1.2 Estrutura da Dissertação**

No Capítulo 2, apresenta-se uma revisão bibliográfica com conceitos fundamentais relacionados a este trabalho: tecnologia SKID BCSS, assinatura temporal do sinal de pressão diferencial, escoamento intermitente e separação gás-líquido em dutos anulares. No Capítulo 3, discute-se o programa experimental, com a descrição da bancada e da matriz de testes. No Capítulo 4, os resultados experimentais relativos ao escoamento intermitente no duto anular são expostos e discutidos: dados sobre os comprimentos e velocidades dos elementos da célula unitária obtidos através do processamento de imagens, análise da assinatura temporal do sinal de pressão diferencial, além de propostas de modelos para tais parâmetros. No Capítulo 5, os resultados experimentais relativos à separação gás-líquido no duto anular são expostos e discutidos, onde propõe-se um novo modelo para a descrição deste fenômeno. Finalmente, no Capítulo 6, apresentam-se as conclusões relativas à análise dos resultados obtidos.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

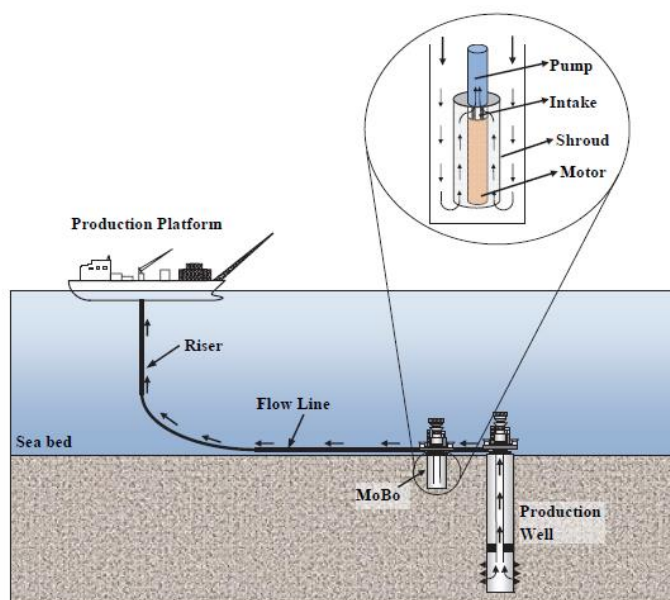
Este capítulo está dividido em 7 partes. A seção 2.1 discute aspectos básicos da tecnologia *SKID BCSS* como características gerais e emprego em campos de petróleo. A seção 2.2 discute técnicas de análise de séries temporais de pressão diferencial para a caracterização de escoamentos bifásicos. A seção 2.3 aborda o escoamento bifásico intermitente em dutos anulares que configura o padrão de escoamento de entrada do sistema sob análise. As seções 2.4 e 2.5 se dedicam à revisão da separação natural gás-líquido em dutos anulares e a modelagem deste processo. Por fim, as seções 2.6 e 2.7 se dedicam aos modelos de fluxo de escorregamento necessários para o fechamento do modelo de separação natural discutido na seção 2.5.

### 2.1 SKID BCSS

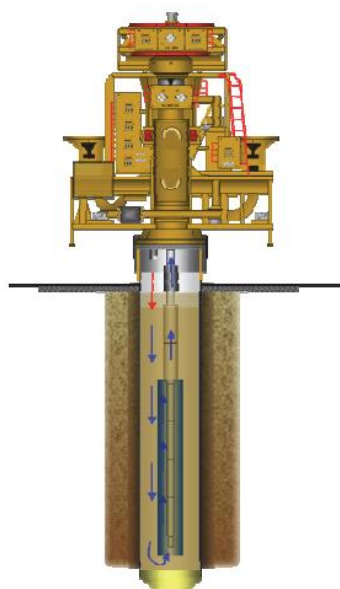
Em completações convencionais, as BCS's são alojadas no interior dos poços, o que possibilita a operação em maiores pressões, com menos gás livre e, portanto, com maiores eficiências de bombeio, o que leva à maiores vazões, fatores de recuperação e tempos médios entre falhas. Porém, no cenário submarino, as falhas das BCSS's impõem grandes custos financeiros devido ao lucro cessante e custosas operações de intervenção nos poços. Visando reduzir estes custos de implantação e operação e paralelamente possibilitar o desenvolvimento de campos marginais, a Petrobras investiu na pesquisa e desenvolvimento de métodos de *boosting* em que as BCSS's ficassem alojadas no leito marinho, simplificando o projeto dos poços submarinos e reduzindo a frequência de intervenções, porém sob o custo de desenvolver estruturas submarinas para alojar as BCSS's (COSTA; OLIVEIRA; ROBERTO, 2013; DAUN, 2013; SILVA, 2010; TARCHA et al., 2016).

A primeira solução adotada foi o Módulo de Bombeio (MOBO), que consiste de um poço falso para alojar a BCSS construído próximo ao poço produtor (Figura 2.1) e de uma base de bombeio que se assemelha à uma Árvore de Natal Molhada (ANM) para controle e roteamento de fluidos (Figura 2.2). Apesar de ter operado com sucesso no campo de Jubarte, esta abordagem possui a desvantagem de demandar uma sonda (recurso crítico) para a construção do poço falso e durante as intervenções. A base de bombeio, por ser similar à uma

Árvore de Natal Molhada (ANM), também se tornou um recurso crítico e os poços apresentaram instabilidades durante as operações devido à segregação de fluidos (SILVA, 2010; TARCHA et al., 2016).



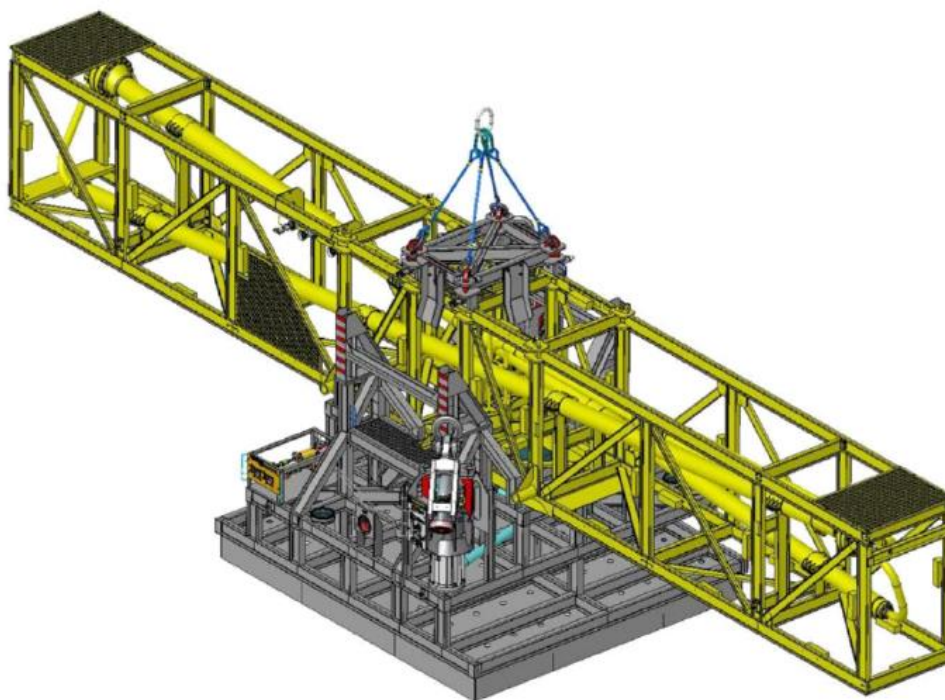
**Figura 2.1** – Sistema de produção com o MOBO (TEIXEIRA et al., 2014)



**Figura 2.2** – Módulo de Bombeio (MOBO) (TEIXEIRA et al., 2014)

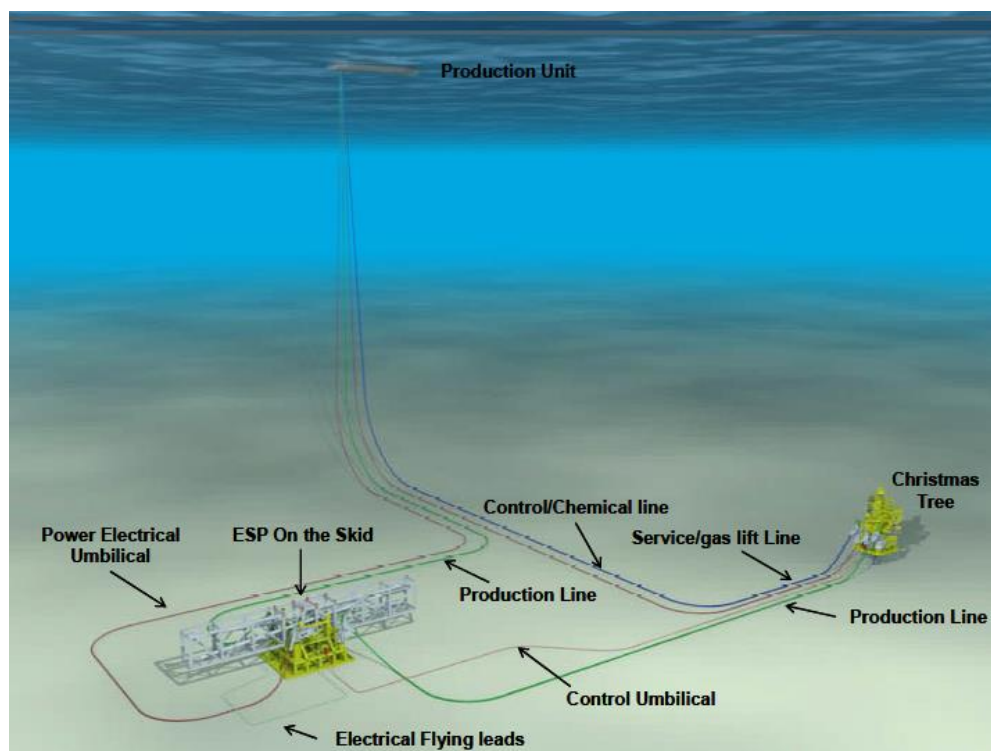
Para suplantar tais desvantagens, a Petrobras partiu para uma abordagem onde não seria necessária a construção do poço falso e que a estrutura submarina demandada fosse a mais simples possível. Para tal, utilizou-se uma estrutura em treliça apoiada no leito marinho,

composta de 2 cápsulas instaladas em paralelo em um *skid*, com um conjunto BCSS em cada e com inclinação de 5 graus em relação à horizontal. Estes conjuntos podem trabalhar hidráulicamente em série ou paralelo, e até mesmo operar apenas um conjunto BCSS, enquanto o outro é *backup*. Este conceito foi batizado como *SKID BCSS* sendo ilustrado na Figura 2.3 e Figura 2.4 (COSTA; OLIVEIRA; ROBERTO, 2013; TARCHA et al., 2016)



**Figura 2.3** – Sistema de *boosting* *SKID BCSS* (TARCHA et al., 2016)

A instalação do sistema BCSS fora do poço, no leito marinho, reduz os custos de instalação e intervenção, porque tais operações podem ser realizadas por um barco em contrapartida ao uso de sondas. Porém, esta abordagem leva à operação com menores pressões de sucção, o que induz maiores frações de vazio, aumentando os riscos de ocorrência dos fenômenos de *surging* e *gas lock*. Outro aspecto positivo da tecnologia *SKID BCSS* é o diferencial de pressão fornecido, superior às soluções de bombeamento multifásico disponíveis até o momento quando utilizadas em cenários com baixa fração de vazio (COSTA; OLIVEIRA; ROBERTO, 2013; TARCHA et al., 2016).



**Figura 2.4-** Campo com um *SKID* BCSS (COSTA; OLIVEIRA; ROBERTO, 2013)

A Petrobras realizou um teste preliminar do conceito no sítio de testes de Atalaia como ilustrado na Figura 2.5, onde o protótipo operou com sucesso a uma fração de vazio sem escorregamento ( $\lambda$ ) na admissão da bomba em torno de 35% para uma pressão de admissão de aproximadamente 35 kgf/cm<sup>2</sup>, além do mais, fora provada a viabilidade da operação de dois motores conectados eletricamente em paralelo (COSTA; OLIVEIRA; ROBERTO, 2013).



**Figura 2.5** – Protótipo do *SKID* BCSS no sítio de testes de Atalaia (COSTA; OLIVEIRA; ROBERTO, 2013)

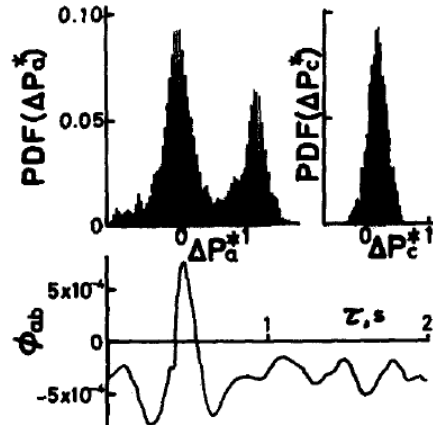
Finalizados os testes preliminares, a tecnologia foi utilizada com sucesso pela Petrobras nos campos de *Cascade* e *Chinook* no Golfo do México, no Teste de Longa Duração (TLD) de Espadarte e no Parque das Baleias na Bacia de Campos (COSTA; OLIVEIRA; ROBERTO, 2013; TARCHA et al., 2016).

## 2.2 Assinatura temporal do sinal de pressão diferencial

Um dos grandes problemas relacionados a escoamentos industriais multifásicos é a dependência de diversos parâmetros com a distribuição geométrica das fases, denominadas padrões de escoamento. Como na grande maioria dos casos, a observação dos padrões não é possível de forma direta, procura-se desenvolver técnicas indiretas para identificá-los. Neste contexto, o presente trabalho buscou descrever o padrão de escoamento de entrada do sistema *SKID* BCSS, uma vez que este influencia a eficiência de separação gás-líquido e consequentemente a eficiência da bomba centrífuga.

Com este objetivo, ao analisar o escoamento bifásico de água e nitrogênio na direção vertical, Matsui (1984 e 1986) propõe a análise da função de densidade de probabilidade (PDF) da série temporal de pressão diferencial normalizada pela altura de líquido correspondente à distância entre as tomadas de pressão (equivalente à pressão diferencial no momento da passagem do pistão de líquido). A partir dos momentos estatísticos que descrevem a variância e a assimetria da função de densidade de probabilidade estimada, propõe um fluxograma para a estimativa do padrão de escoamento visualizado. Reporta-se, a partir da observação dos dados experimentais, que há uma dependência entre as escalas observadas do escoamento e a distância entre as tomadas de pressão, especificamente para o padrão golfadas. Observa-se uma distribuição de probabilidades uni ou bimodal dependendo da distância entre as tomadas de pressão como reportado na Figura 2.6. Portanto, propõe que esta distância seja usada como uma espécie de filtro para observar separadamente as grandes e pequenas escalas do escoamento. Também cita que a correlação cruzada entre as pressões medidas nas diferentes tomadas possui um pico pronunciado para o padrão golfadas. Por fim, não é feita nenhuma discussão teórica ou fundamentação física embasando a normalização proposta, nem a razão da dependência entre a distância entre as tomadas de pressão e as escalas observadas. Além do mais, nota-se que esta dependência por si só já inviabiliza o uso do fluxograma proposto, pois

cada arranjo experimental leva a propriedades estatísticas diferentes da série temporal de pressão (MATSUI, 1984, 1986).



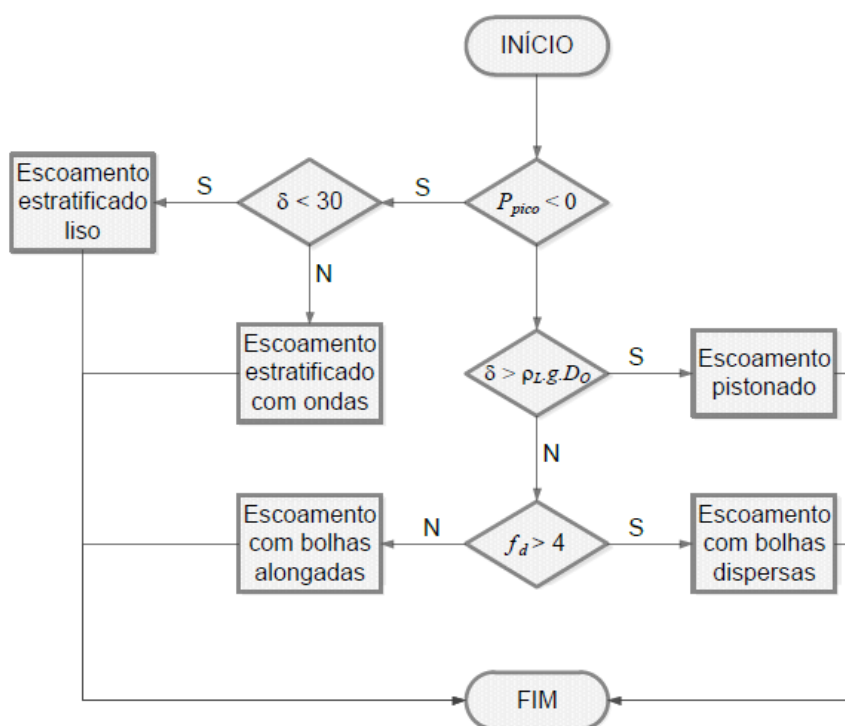
**Figura 2.6** – PDF's observadas em diferentes escalas para o padrão intermitente e correlação cruzada (MATSUI, 1984)

Drahos (1987) propõe duas abordagens para a análise dos sinais de pressão diferencial, a primeira utiliza os dados do gradiente médio de pressão confrontando-os com um modelo obtido através de uma análise dimensional que relaciona o gradiente médio de pressão com as velocidades superficiais de cada fase. Propõe-se que a transição entre padrões de escoamento ocorre quando houver mudanças nas inclinações das retas obtidas em um gráfico log-log entre gradiente médio de pressão e velocidade superficial da fase. A segunda abordagem é similar a proposta por Matsui (1984 e 1986) onde analisam-se os momentos estatísticos e a função de densidade de probabilidade estimada a partir da série temporal de pressão diferencial além de propor um fluxograma para estimativa dos padrões de escoamento a partir destes parâmetros (DRAHOŠ et al., 1987; EBNER et al., 1987).

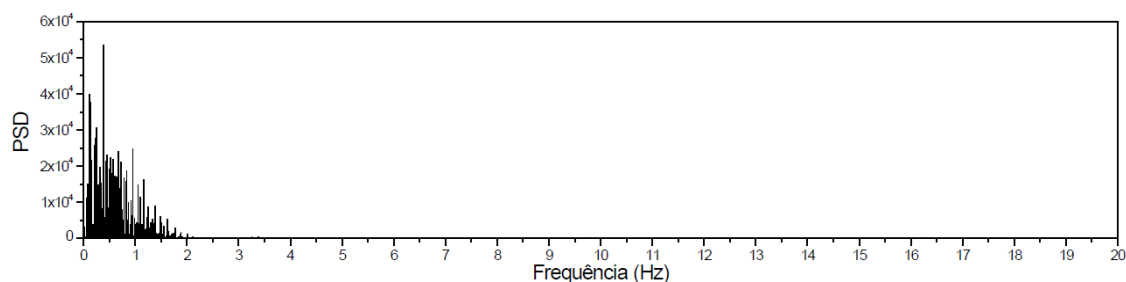
Drahos (1989) revisa uma série de métodos para a identificação dos padrões de escoamento a partir do estudo da assinatura temporal da pressão diferencial. Dentre os métodos mencionados, destaca-se o uso da fase do espectro da correlação cruzada para calcular o tempo de trânsito da onda de pressão quando a função de coerência for alta, indicando uma relação linear entre as pressões medidas, porém não apresenta uma discussão sobre os aspectos físicos da onda sob análise, sua relação com os padrões de escoamento nem explica o motivo das medidas de pressão terem um comportamento linear entre si. Por fim, discute-se a possibilidade do uso de modelos regressivos para a análise das séries temporais de pressão visando inferir os padrões de escoamento a partir dos coeficientes estimados (DRAHOŠ; ČERMÁK, 1989).



Baseando-se nos trabalhos de Matsui (1984 e 1986) e Drahos (1987 e 1989), Mendes (2012) propõe que a identificação dos padrões de escoamento ocorra de forma objetiva utilizando as assinaturas de pressão diferencial medidas com um transdutor de pressão diferencial de alta frequência (*Validyne* DP15 adquirido a 5 kHz, porém com um filtro passa baixas com frequência de corte de 20 Hz). Propõe-se o fluxograma da Figura 2.7 para a identificação do padrão de escoamento em dutos anulares baseado em três parâmetros, sendo a frequência de maior energia na densidade espectral de potência (PSD) chamada de frequência dominante  $f_d$  conforme exibido na Figura 2.8, na moda da distribuição de densidade de probabilidade, chamada de  $P_{pico}$  e na medida de dispersão chamada de  $\delta$  que equivale ao máximo valor medido subtraído da moda. Tal como nos autores supracitados, os parâmetros de decisão são ajustados para o arranjo experimental específico do autor e não há discussões físicas sobre o significado das variáveis e dos limites utilizados (MENDES, 2012).



**Figura 2.7** – Fluxograma de identificação do padrão de escoamento ar-água para dutos anulares horizontais ou levemente inclinados (MENDES, 2012)



**Figura 2.8** – PSD do escoamento no padrão intermitente (MENDES, 2012)

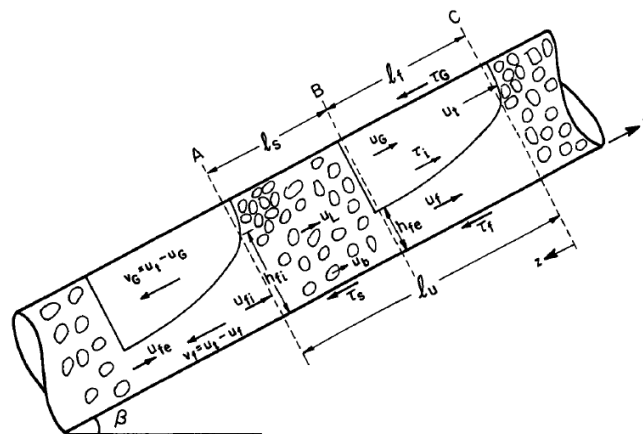
Cai et al. (1996) utilizou a teoria do caos na análise do sinal de pressão diferencial visando identificar padrões de escoamento água-ar em um canal retangular horizontal, dentre os métodos utilizados destacam-se as análises da dimensão de correlação fractal, expoentes de Lyapunov, além da análise da estrutura da trajetória dos sinais no pseudo plano de fase, neste último caso, similar ao trabalho de França et al. (1991). Demonstrou-se que as flutuações de pressão características do escoamento bifásico são caóticas e governadas por um sistema determinístico de alta ordem, além de propor que a dimensão de correlação fractal pode ser utilizada para identificar padrões de escoamento e transições (CAI; WAMBSGANSS; JENDRZEJCZYK, 1996; FRANCA et al., 1991).

Elperin et al. (2002) utilizou a decomposição *wavelet* do sinal de pressão diferencial para avaliar os níveis de energia de cada componente para então correlacioná-los com sucesso aos padrões de escoamento observados (ELPERIN; KLOCHKO, 2002). Ding et al. (2007) de forma similar, utilizou a decomposição nos modos empíricos (EMD – *Empirical Mode Decomposition*) a partir da transformada Hilbert-Huang avaliando os efeitos dos padrões de escoamento nas distribuições tempo-frequência de cada componente encontrada (DING et al., 2007). Li et al. (2014) e Han et al. (2016) avaliaram em diferentes cenários os impactos dos padrões de escoamento em distribuições tempo-frequência dos sinais de pressão diferencial utilizando a técnica *Adaptive Optimal Kernel Time-Frequency Representation* (AOK TFR). Adicionalmente, similar ao feito por Cai et al. (1996), Li et al. (2015) propõe a análise da estrutura da trajetória dos sinais de pressão diferencial no pseudo plano de fase em conjunto com a distribuição tempo-frequência para a identificação de padrões de escoamento água-nitrogênio em um canal retangular vertical (HAN et al., 2016; LI et al., 2015, 2014). Apesar da diversidade de métodos de processamento de sinais utilizados, todos estes trabalhos buscam levantar um determinado tipo de espectro tempo-frequência e correlacionar os padrões de escoamento com as características e os níveis de energia observados.

De maneira geral, percebe-se que os trabalhos disponíveis na literatura que se propõem a identificar padrões de escoamento bifásico baseados em sinais de assinatura de pressão apresentam lacunas tanto na modelagem de tais escoamentos quanto na conexão desta com a análise de sinais aplicada, de modo que as abordagens apresentadas ficam restritas a determinado aparato experimental.

### 2.3 Escoamento Bifásico Intermitente em Dutos Anulares

O padrão intermitente pode ser definido como aquele onde há alternância de estruturas denominadas células unitárias com um comprimento  $L_U$  que se repetem ao longo do duto com uma frequência característica como ilustrado na Figura 2.9. Estas células são constituídas por pistões de líquido aerado com comprimento  $L_S$  no padrão disperso seguido de uma bolha e um filme de líquido no padrão separado com comprimento  $L_F$ . A interface entre a bolha e o filme de líquido geralmente é assumida plana para dutos horizontais e inclinados remetendo ao padrão estratificado enquanto que para dutos verticais a interface é geralmente considerada concêntrica remetendo ao padrão anular (SHOHAM, 2005a; TAITEL; BARNEA, 1990; WALLIS, 1969).



**Figura 2.9** – Célula Unitária (TAITEL; BARNEA, 1990)

Nicklin et al. (1962) propuseram que a célula unitária é transladada pela velocidade de ascensão da bolha de Taylor  $V_{TB}$  dada pela relação cinemática do modelo de fluxo de escorregamento:

$$V_{TB} = C_0 j_m + V_{\infty TB} \quad (2.1)$$

$$V_{\infty TB} = C_1 \sqrt{g D_H} \quad (2.2)$$

onde  $V_{\infty TB}$  é a velocidade de ascensão da bolha de Taylor em um meio infinito e estacionário,  $j_m$  a velocidade de mistura definida para o centro de volume,  $C_0$  o coeficiente de distribuição,  $C_1$  o número de Froude durante a ascensão da bolha de Taylor em um meio infinito e estacionário,  $D_H$  o diâmetro característico que para o duto anular é o diâmetro hidráulico equivalente como definido pela Equação (2.5) e  $g$  a aceleração da gravidade. Para escoamentos verticais desenvolvidos em dutos de seção circular, tem-se que (NICKLIN, 1962):

$$C_0 = 1.2 \quad (2.3)$$

$$C_1 = \frac{V_{\infty TB}}{\sqrt{g D_H}} = 0.345 \quad (2.4)$$

$$D_H = D_e - D_i \quad (2.5)$$

Entretanto, nos escoamentos verticais em dutos anulares, Griffith e Snyder (1964) constataram experimentalmente que a dimensão característica utilizada na Equação (2.2) deveria ser o diâmetro externo  $D_e$  e que a constante  $C_1$  depende da razão de aspecto do duto anular definida como (GRIFFITH; SNYDER, 1964):

$$r_a = \frac{D_i}{D_e} \quad (2.6)$$

onde  $D_i$  é o diâmetro interno do duto anular e  $r_a$  a razão de aspecto.

A partir de observações experimentais, Sadatomi et al. (1982) propuseram que a dimensão característica deveria ser o diâmetro equiperiférico  $D_{eq}$  calculado em função do perímetro molhado  $S_{mol}$ . Caetano et al. (1992) afirmaram que tal modelo apresentou a melhor performance quando comparado aos dados experimentais levantados para dutos anulares verticais (CAETANO; SHOHAM; BRILL, 1992a, 1992b; SADATOMI; SATO; SARUWATARI, 1982):

$$D_{eq} = \frac{S_{mol}}{\pi} = D_e + D_i \quad (2.7)$$

Hasan e Kabir (1992) determinaram experimentalmente a velocidade de ascensão da bolha de Taylor para diversas razões de aspecto, confirmando as observações de Griffith e Snyder (1964). Propuseram o seguinte modelo para dutos anulares verticais considerando  $C_1$  como o número de Froude bifásico e dependente da razão de aspecto representada pela Equação (2.6) (HASAN; KABIR, 1992):

$$V_{\infty TB} = (0.345 + 0.1r_a) \sqrt{gD_e \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \right)} \quad (2.8)$$

Para dutos anulares levemente inclinados em relação à vertical Hasan e Kabir (1992) propuseram o seguinte modelo:

$$V_{\infty TB} = (0.345 + 0.1r_a) \sqrt{gD_e \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \right)} \sqrt{\sin \theta} (1 + \cos \theta)^{1.2} \quad (2.9)$$

Mendes (2012) comparou os modelos supracitados com dados experimentais levantados pelo próprio autor e reportou que o modelo proposto por Hasan e Kabir (1992) foi o que apresentou melhores resultados (MENDES, 2012).

Para escoamentos inclinados em dutos de seção circular, as Equações (2.1) e (2.2) devem ser reescritas (BENDIKSEN, 1984):

$$C_0 = \begin{cases} 1.2 - \text{Turbulento} \\ 2.0 - \text{Laminar} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$V_{\infty TB} = 0.54\sqrt{gD_H} \cos \theta + 0.35\sqrt{gD_H} \sin \theta \quad (2.11)$$

O modelo proposto por Bendiksen (1984) é baseado no proposto por Nicklin et al. (1962), com a diferença que as velocidades de ascensão da bolha de Taylor são projetadas nas direções vertical e horizontal. Não há na literatura modelos para o escoamento intermitente horizontal levemente inclinado para dutos anulares.

A frequência da célula unitária é definida como o inverso do seu período de trânsito em uma seção do duto. Portanto, é a razão da velocidade de translação pelo seu comprimento:

$$f_u = \frac{V_{TB}}{L_U} \quad (2.12)$$

onde:

$$L_U = L_F + L_S \quad (2.13)$$

A correlação para a frequência da célula unitária proposta por Zabaras (2000) baseando-se no trabalho de Gregory e Scott (1969) considera dutos horizontais levemente inclinados de seção circular. As correlações restantes são para as direções vertical ou horizontal somente, sem modelos dedicados ao duto anular (GREGORY; SCOTT, 1969; ZABARAS, 2000).

$$f_u = 0.0226(0.836 + 2.75 \sin \theta^{0.25}) \left[ \left( \frac{j_1}{gD} \right) \left( \frac{19.75}{V_m} + V_m \right) \right]^{1.2} \quad (2.14)$$

O fator de intermitência  $\beta$  é a fração dos comprimentos ou dos tempos de trânsito equivalentes da região de bolha de Taylor em relação ao total da célula unitária:

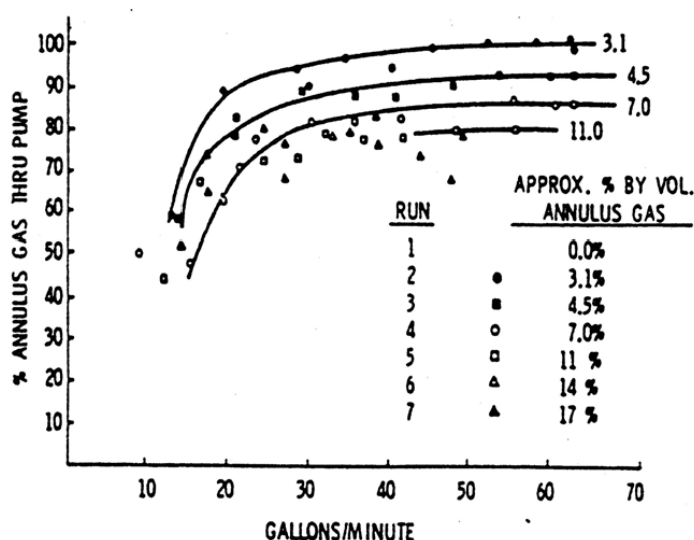
$$\beta = \frac{L_F}{L_U} = L_F \frac{f_u}{V_{TB}} \quad (2.15)$$

Basta conhecermos um dos comprimentos da célula unitária ou o fator de intermitência para termos a completa descrição geométrica da célula. Taitel et al. (1980) mostrou que para diversas condições operacionais para escoamentos verticais em dutos de seção circular o pistão de líquido possui um comprimento aproximadamente constante igual a 16 diâmetros, desta forma, Caetano et al. (1992) sugere que para o duto anular seja usado o diâmetro hidráulico equivalente. (CAETANO; SHOHAM; BRILL, 1992a; TAITEL; BARNEA; DUKLER, 1980).

## 2.4 Separação Natural em Dutos Anulares

O processo de segregação de fluidos no interior da cápsula do *SKID* BCSS torna o *surging* mais provável por levar à maiores frações de gás livre *in situ* instantâneas, portanto, é de extremo interesse avaliar este fenômeno em geometrias anulares. Para tal, discute-se a seguir os trabalhos desenvolvidos a respeito da separação natural em anulares de poços produtores.

Lea e Bearden (1982) realizaram experimentos que visavam avaliar os efeitos da separação natural e da presença de gás livre na performance de bombas centrífugas submersas. Os testes foram conduzidos com uma bomba centrífuga série 500 da Centrilift (5.13" OD) alojada em um revestimento de 7" OD, escoando ar e água com pressões entre 25 e 30 psi. Reportaram que a eficiência de separação diminui com o crescimento da vazão de líquido e com a redução da fração de gás livre. Os resultados para o percentual de gás sugado pela bomba (o inverso do separado para o topo) estão expressos na Figura 2.10 (LEA; BEARDEN, 1982a):

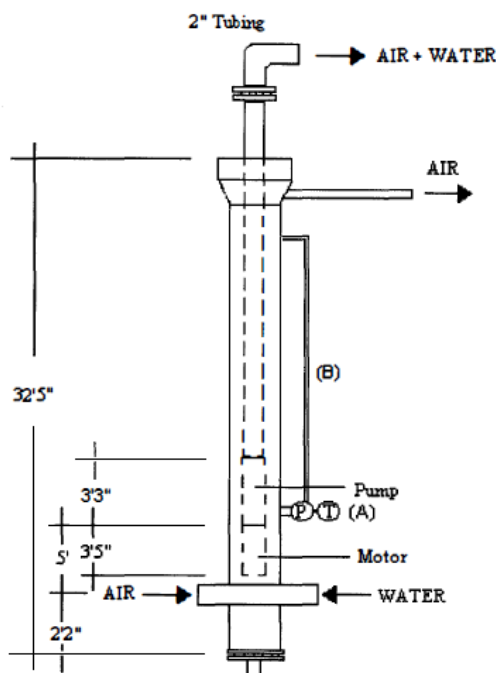


**Figura 2.10** - Percentual de gás sugado pela bomba centrífuga (LEA; BEARDEN, 1982a)

Alhanati (1993) desenvolveu um aparato experimental visando medir a eficiência de separação natural e de separadores rotativos, tal aparato consistia de uma seção vertical (50' de altura, revestimento de 7" OD alojando um separador rotativo da série 400) operando com ar e água em uma pressão máxima de 400 psig como ilustrado na Figura 2.11. Os resultados experimentais mostraram que a eficiência de separação natural cai com o acréscimo da vazão de líquido e decréscimo da razão gás líquido em consonância com o reportado por Lea e Bearden (1982) (ALHANATI, 1993).



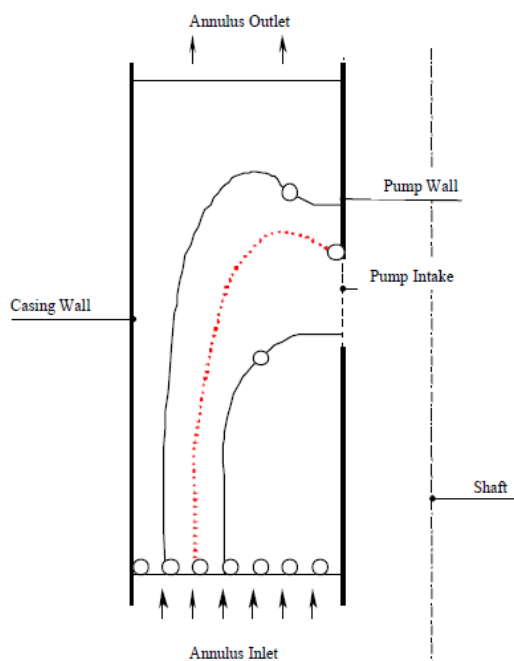




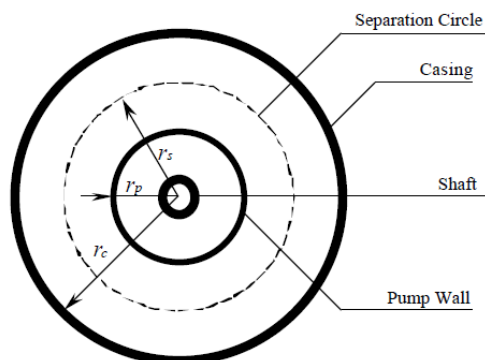
**Figura 2.12** – Aparato experimental (VILORIA, 1999)

Harun (2001) propôs um modelo mecanicista para descrever a separação natural em um poço vertical. O modelo baseia-se na equação de momento da mistura cujo domínio é um volume de controle envolvendo a região do *intake*, aplica-se uma lei generalista para o escorregamento. Os dados experimentais de Alhanati (1993) e Viloría (1999) foram utilizados para obter uma correlação empírica para o coeficiente de arrasto das bolhas para fechar o modelo (HARUN, 1999; HARUN et al., 2001, 2003).

Liu (2001) propôs um modelo de seguimento de bolhas para modelar a separação natural em poço vertical onde, inicialmente, resolve-se o campo de velocidades e pressões para a fase líquida utilizando um modelo bidimensional em coordenadas cartesianas do escoamento monofásico através das funções corrente e de vorticidade. De posse do campo de velocidades e de pressões, resolve-se o balanço de forças para uma única bolha cuja trajetória é levantada sobre o domínio de análise como ilustrado na Figura 2.13. A separação natural é estimada geometricamente caso a trajetória da bolha a leve ao *intake* ou para o topo do anular. Adicionalmente, define-se o conceito de círculo de separação que delimita uma região do domínio cujas bolhas serão sugadas para o *intake* como indicado na Figura 2.14 (LIU, 2002; LIU; PRADO, 2001).



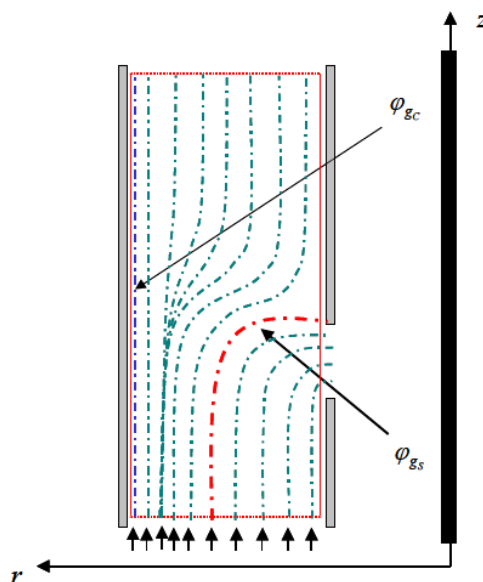
**Figura 2.13** – Trajetória das bolhas (LIU, 2002; LIU; PRADO, 2001)



**Figura 2.14** – Seção do anular e círculo de separação (LIU, 2002; LIU; PRADO, 2001)

Márquez (2004) propõe um modelo simplificado para a separação natural em um poço vertical baseado no uso do modelo de deslizamento aplicado a um volume de controle na região do *intake*. O modelo é fechado com relações de escorregamento clássicas para a direção vertical e uma correlação ajustada a partir de dados experimentais é obtida para modelar o escorregamento na direção radial. Também é proposto um modelo simplificado para a obtenção dos campos de pressão e velocidades para a fase líquida visando utilizar simplificadamente a abordagem de seguimento de bolhas proposta por Liu (2002). Por fim, Márquez (2004) aplicou a abordagem de funções corrente e de vorticidade para o modelo de mistura bidimensional em

coordenadas cilíndricas, resolvendo-o numericamente para obter as eficiências de separação como ilustrado na Figura 2.15 (MARQUEZ, 2004; MARQUEZ; PRADO, 2003).



**Figura 2.15** – Função corrente para a fase gasosa (MARQUEZ, 2004)

As relações de dependência da eficiência de separação natural em relação à vazão de líquido e a fração gás-líquido reportadas acima sugerem que o processo de separação se dá a partir do equilíbrio entre os fenômenos físicos de arrasto e empuxo, logo a inclinação, os padrões de escoamento no anular e o equilíbrio de forças nas bolhas de gás possuem impacto direto no fenômeno e, portanto, devem ser discutidos e inclusos numa modelagem do problema de separação.

Em nenhum dos trabalhos foi feita a visualização do escoamento, os padrões foram inferidos a partir dos modelos clássicos (BARNEA, 1987; TAITEL; BARNEA; DUKLER, 1980) e os mecanismos de separação foram elucidados indiretamente a partir de simulações ou da avaliação dos parâmetros medidos como pressões, vazões e eficiências, portanto há uma janela de contribuição no que diz respeito à visualização dos fenômenos inferidos.

Por fim, os trabalhos se concentram no caso vertical (ALHANATI, 1993; LIU, 2002; MARQUEZ, 2004) e o que trata do caso inclinado se baseia em uma regressão de dados experimentais para o cálculo da fração de vazio em frente ao *intake* modificada pelo escorregamento radial (VILORIA, 1999), portanto há um grande espaço para contribuir na modelagem dos casos inclinados.

## 2.5 Modelagem da Separação Natural

O primeiro modelo teórico para o processo de separação natural em dutos anulares foi proposto por Alhanati (1993) para poços verticais desprezando o escorregamento radial no intake. Vilorio (1999) além de tratar os casos inclinados, reportou a importância do escorregamento radial, porém não modelou tal fenômeno, recorrendo a uma correlação que ajustasse seus dados experimentais obtida através de uma regressão para calcular a fração de vazio no intake. Harun (2001) e Márquez (2004) buscam modelar o escorregamento radial a partir de uma abordagem mecanicista, porém os modelos necessitam igualmente de fechamento a partir de dados experimentais para os parâmetros de densidades de áreas interfaciais, dimensão característica das bolhas e coeficientes de arrasto, além de tratarem somente do caso vertical (ALHANATI, 1993; HARUN et al., 2001; MARQUEZ, 2004; VILORIA, 1999).

Ao analisar os resultados obtidos a partir da solução numérica do modelo de mistura bidimensional na região do *intake* no duto anular vertical, Alhanati (1993) percebeu que as frações de vazio eram relativamente constantes, o que foi justificado pelo fato do escorregamento entre as fases depender somente das propriedades dos fluidos. Portanto, este seria localmente constante considerando que as propriedades dos fluidos variam pouco na vizinhança do *intake*. Dessa maneira, como a fração de vazio *in situ* depende diretamente do escorregamento, não haveria motivos para que ela apresente grandes variações. Além disso, o escorregamento entre as fases depende majoritariamente do empuxo, logo, como a geometria sob análise é vertical, não há componente radial do empuxo. Portanto, para calcular as vazões direcionadas ao *intake*, basta utilizar o modelo homogêneo (ALHANATI, 1993).

Estas hipóteses devem ser extrapoladas para o duto anular levemente inclinado em relação à horizontal com cautela, pois o escorregamento entre as fases depende somente das propriedades dos fluidos para os padrões de escoamento bolhas, bolhas dispersas e golfadas, apesar destes regimes serem dominantes na matriz de testes de Alhanati (1993), tal hipótese não é verdadeira para outros padrões de escoamento (ISHII; HIBIKI, 2011). Como o duto anular é levemente inclinado em relação à horizontal, há inevitavelmente uma componente radial do empuxo que deve ser considerada, além de haver uma considerável aceleração convectiva radial, pois, a velocidade do líquido é nula no raio externo do duto anular e aproximadamente a totalidade da velocidade do fluido no anular para o raio interno, aproximadamente pois uma pequena parcela pode subir para o topo do anular eventualmente.

Sob tais hipóteses, Alhanati (1993) propôs que a fração de vazio no escoamento de entrada no duto anular fosse calculada através da Equação (2.16):

$$\alpha = \frac{j_2}{j_1 + j_2 + v_s(1 - \alpha)} \quad (2.16)$$

onde  $j_1$  e  $j_2$  são os fluxos volumétricos de cada fase no duto anular, líquido e gás respectivamente, e  $v_s$  é a velocidade relativa entre as fases líquida e gasosa dada pela Equação (2.17):

$$v_s = v_2 - v_1 \quad (2.17)$$

Neste caso utilizou-se a definição de velocidade relativa entre fases para o cálculo da fração de vazio, logo a Equação (2.16) não representa a aplicação direta do modelo de fluxo de escorregamento para o caso mais generalista, mas como a matriz de Alhanati (1993) se concentra nos padrões *slug* e *churn* (ALHANATI, 1993), trata-se de uma boa aproximação, pois para estes padrões recomenda-se (ISHII; HIBIKI, 2011):

$$V_\infty = \sqrt{2} \left[ \frac{\sigma(\rho_1 - \rho_2)g}{\rho_1^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2.18)$$

$$\tilde{V}_{2J} = V_\infty(1 - \alpha)^n \text{ onde } n = 1 \text{ se } \textit{slug} \text{ ou } \textit{churn} \quad (2.19)$$

o que torna ambas as definições equivalentes se considerarmos um coeficiente de distribuição  $C_0$  unitário. Ao assumir a hipótese do modelo homogêneo para o escoamento radial, a vazão de gás sugada pela BCS é dada pela Equação (2.20):

$$Q_{gs} = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} Q_{ls} \quad (2.20)$$

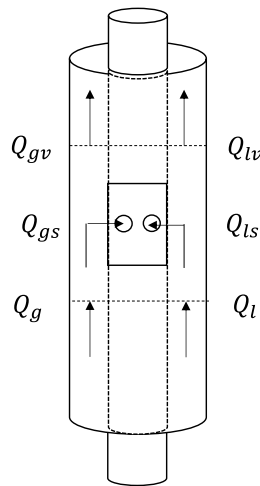
onde  $Q_{gs}$  e  $Q_{ls}$  são as vazões de gás e líquido sugadas pela BCS e  $\alpha$  é a fração de vazios do escoamento no duto anular. Neste caso, assume-se o modelo homogêneo e que a fração de gás em frente ao *intake* é igual à calculada para o duto anular. Assumindo fluidos incompressíveis, propriedades das fases localmente constantes e que em regime permanente o nível dinâmico

formado pela interface gás-líquido seja estável, portanto todo líquido seria sugado pela BCS, faz-se um balanço de massa para o volume de controle à frente do intake como indicado na Figura 2.16:

$$Q_{gv} = Q_g - Q_{gs} \quad (2.21)$$

$$Q_{lv} = 0 \Leftrightarrow Q_{ls} = Q_l \quad (2.22)$$

onde  $Q_{lv}$  e  $Q_{gv}$  são as vazões de líquido e de gás que migram para o topo do duto anular.



**Figura 2.16** – Volume de Controle para o separador vertical

A Equação (2.21) pode ser reescrita com o auxílio das Equações (2.20) e (2.22):

$$Q_{gv} = Q_g - Q_{gs} = Q_g - \frac{\alpha}{(1-\alpha)} Q_{ls} = Q_g - \frac{\alpha}{(1-\alpha)} Q_l \quad (2.23)$$

Se definirmos a Eficiência de Separação como a fração da vazão volumétrica de gás no duto anular que migra para o topo, divide-se a Equação (2.23) por  $Q_g$ , logo:

$$\frac{Q_{gv}}{Q_g} = E = 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{Q_l}{Q_g} = 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{j_1}{j_2} = \frac{(1-\alpha)j_2 - \alpha j_1}{(1-\alpha)j_2} \quad (2.24)$$

Considerando que o modelo de escorregamento expresso na Equação (2.16) pode ser reescrito:

$$(1 - \alpha)j_2 = \alpha j_1 + v_s \alpha (1 - \alpha) \quad (2.25)$$

Substitui-se a Equação (2.25) na Equação (2.24), portanto:

$$E = \frac{(1 - \alpha)j_2 - \alpha j_1}{(1 - \alpha)j_2} = \frac{v_s \alpha (1 - \alpha)}{\alpha j_1 + v_s \alpha (1 - \alpha)} = \frac{v_s (1 - \alpha)}{j_1 + v_s (1 - \alpha)} \quad (2.26)$$

Para os padrões *slug* e *churn*, a Equação (2.26) pode ser reescrita a partir da Equação (2.19):

$$E = \frac{v_s (1 - \alpha)}{j_1 + v_s (1 - \alpha)} = \frac{\tilde{V}_{2J}}{j_1 + \tilde{V}_{2J}} \quad (2.27)$$

A Equação (2.27) representa um resultado interessante, pois se a velocidade superficial da fase líquida for nula, a eficiência seria 100%, ou seja, todo o gás iria para o topo do duto anular já que não seria arrastado pelo líquido. Além disso, o formato da função que leva à queda da eficiência com o crescimento da velocidade superficial do líquido condiz com o que foi reportado na seção 2.4 (ALHANATI, 1993; ALHANATI et al., 1994). Porém, possui a desvantagem de não depender da razão gás-líquido e da geometria do *intake*, parâmetros relevantes segundo a literatura.

Viloria (1999) propôs que a fração de vazio no *intake* deveria ser diferente da fração de vazio do escoamento no duto anular, já que as propriedades do escoamento são diferentes. Porém esta fração de vazio foi obtida a partir de uma correlação oriunda da regressão dos dados experimentais obtidos pelo autor e da base de dados do TUALP (*Tulsa University Artificial Lift Project*). Esta correlação calcula a fração de vazio do *intake* como uma função da fração de vazio no duto anular e da inclinação (VILORIA, 1999). Considerando as mesmas premissas supracitadas quanto ao balanço de massa, obtêm-se uma equação similar a Equação (2.24):

$$E = 1 - \frac{\alpha_p}{(1 - \alpha_p)} \frac{j_1}{j_2} \quad (2.28)$$

onde  $\alpha_p$  é a fração de vazio no *intake* obtida pela seguinte correlação (VILORIA, 1999):

$$\alpha_p = 1.43\alpha^{1.07} - 5.49\alpha^{1.07}(1 - \alpha)^{8.47}(\cos \theta)^{1.74} \quad (2.29)$$

A fração de vazio  $\alpha$  é obtida através do modelo de fluxo de escorregamento para o escoamento no duto anular à montante do *intake*, considerando a inclinação  $\theta$  em relação à horizontal. Márquez (2004) sumariza a relação entre os modelos de Alhanati (1993) e Viloría (1999) como descrito a seguir. A partir das Equações (2.24) e (2.28) (MARQUEZ, 2004):

$$\frac{(1 - \alpha_p)}{\alpha_p} (1 - E^{Viloria}) = \frac{j_1}{j_2} = \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} (1 - E^{Alhanati}) \quad (2.30)$$

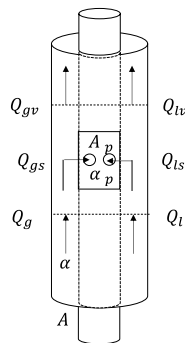
$$\left[ \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \frac{(1 - \alpha_p)}{\alpha_p} \right]^{1/\psi} (1 - E^{Viloria}) = (1 - E^{Alhanati}) \quad (2.31)$$

$$E^{Viloria} = \psi E^{Alhanati} + (1 - \psi) \quad (2.32)$$

onde  $\psi$  representa o desvio entre as frações de vazio no duto anular e no *intake*, uma medida indireta dos efeitos locais do escorregamento radial na fração de vazios à frente do *intake*:

$$\psi = \frac{\alpha_p}{(1 - \alpha_p)} \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \quad (2.33)$$

Márquez (2004) propõe uma formulação geral que será revista nesta seção. Seja o volume de controle dado pela Figura 2.17 e mantidas as condições e hipóteses anteriores (MARQUEZ, 2004).



**Figura 2.17** – Volume de Controle do Separador



A partir do balanço de massa já citado, deriva-se uma Equação similar a Equação (2.23):

$$Q_{gv} = Q_g - Q_{gs} \Leftrightarrow E = \frac{Q_{gv}}{Q_g} = 1 - \frac{Q_{gs}}{Q_g} \quad (2.34)$$

$$E = 1 - \frac{Q_{gs}}{Q_g} \quad (2.35)$$

A vazão de gás sugada pela BCS e a vazão de gás no duto anular são:

$$Q_{gs} = -j_{2r}A_p \quad (2.36)$$

$$Q_g = j_2A \quad (2.37)$$

onde  $j_2$  e  $j_{2r}$  são as velocidades superficiais da fase gasosa no duto anular e nas portas do *intake* (sendo esta negativa pois possui a direção oposta à do versor radial),  $A$  e  $A_p$  são as áreas no duto anular e das portas do *intake*, respectivamente. Substituindo as Equações (2.36) e (2.37) na Equação (2.35) temos:

$$E = 1 + \left(\frac{j_{2r}}{j_2}\right)\left(\frac{A_p}{A}\right) \quad (2.38)$$

A Equação (2.38) adiciona uma propriedade interessante em relação às demais ao introduzir o fator de forma que se traduz na relação entre as áreas do duto anular e das portas do *intake*. Trata-se da primeira vez que aparecem indícios no modelo de que a geometria das portas do *intake* gera impacto na eficiência de separação natural, que do ponto de vista qualitativo, em uma análise preliminar intuitiva, seria um fato.

A velocidade superficial da fase gasosa no anular e as áreas são conhecidas, restando para o fechamento do cálculo da eficiência de separação natural a definição da velocidade superficial radial da fase gasosa. Seja a velocidade superficial radial da fase líquida (também negativa por possuir uma direção oposta à do versor radial):

$$j_{1r} = -j_1 \left( \frac{A}{A_p} \right) \quad (2.39)$$

A velocidade relativa entre as fases na direção radial é dada por:

$$v_{sr} = \frac{j_{2r}}{\alpha_p} - \frac{j_{1r}}{(1 - \alpha_p)} \quad (2.40)$$

A velocidade superficial radial da fase gasosa pode ser reescrita a partir das Equações (2.39) e (2.40):

$$j_{2r} = \alpha_p v_{sr} - \frac{\alpha_p}{(1 - \alpha_p)} \left( \frac{A}{A_p} \right) j_1 \quad (2.41)$$

Substituindo a Equação (2.41) na Equação (2.38):

$$E = 1 + \left[ \left( \frac{\alpha_p}{j_2} \right) v_{sr} \right] \left( \frac{A_p}{A} \right) - \left[ \frac{\alpha_p}{(1 - \alpha_p)} \right] \left( \frac{A_p}{A} \right) \left( \frac{j_1}{j_2} \right) \quad (2.42)$$

Para ficar coerente com o modelo proposto por Alhanati (1993), reescreve-se a Equação (2.42) considerando a fração de vazio sem escorregamento  $\lambda$  e a velocidade superficial da fase líquida no duto anular:

$$E = 1 - \left[ \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \right] \left[ \frac{\alpha_p}{(1 - \alpha_p)} \right] \left\{ 1 - \left( \frac{A_p}{A} \right) \left( \frac{v_{sr}}{v_{1r}} \right) \right\} \quad (2.43)$$

onde a velocidade radial da fase líquida in situ  $v_{1r}$  é dada por:

$$v_{1r} = \frac{j_1}{(1 - \alpha_p)} \quad (2.44)$$

A Equação (2.43) mostra que a eficiência depende do fator de forma que se traduz na relação entre as áreas do duto anular e do *intake*, da fração de gás sem escorregamento do

duto anular explicando o aumento da eficiência observado com o aumento da razão gás líquido reportado na literatura, da razão entre a velocidade relativa radial e a velocidade radial da fase líquida *in situ* e da fração de vazios considerando escorregamento no volume de controle. Ainda resta a definição da velocidade relativa radial e da fração de vazio *in situ* no volume de controle em torno do *intake*, porém não há referências na literatura sobre modelos de fluxo de escorregamento para caso similar (escoamento axial combinado com radial em duto anular).

A partir da Equação (2.24), pode-se reescrever o modelo de Alhanati (1993) da seguinte forma (ALHANATI, 1993):

$$E = 1 - \left[ \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \right] \left[ \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \right] \quad (2.45)$$

A Equação (2.45) que corresponde à uma forma modificada do modelo de Alhanati (1993) equivale à Equação (2.43) se:

$$\alpha = \alpha_p \quad (2.46)$$

$$v_{sr} = 0 \quad (2.47)$$

Ou seja, o escorregamento radial representa o desvio em relação ao modelo de Alhanati (1993), por alterar a fração de vazio à frente do *intake*, tornando inválida a hipótese de modelo homogêneo.

$$E = 1 - \overbrace{\left[ \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \right] \left[ \frac{\alpha_p}{(1 - \alpha_p)} \right]}^{\text{Alhanati}} \left\{ 1 - \overbrace{\left( \frac{A_p}{A} \right) \left( \frac{v_{sr}}{v_{1r}} \right)}^{\text{Desvio}} \right\} \quad (2.48)$$

Ainda resta definir a natureza do escorregamento radial para o fechamento do modelo. Márquez (2004) propõe o uso do modelo de fluxo de escorregamento tridimensional (ISHII; HIBIKI, 2011), onde a velocidade de escorregamento é dada por:

$$\tilde{V}_{2J} = V_{\infty}(1 - \alpha)^n - \frac{D^{\alpha}}{\alpha} \nabla \alpha \quad (2.49)$$

Devido à escassez de referências na literatura, o coeficiente de difusão  $D^\alpha$  foi ignorado (MARQUEZ, 2004), logo:

$$\tilde{V}_{2J} = V_\infty (1 - \alpha)^n \quad (2.50)$$

onde  $V_\infty$  representa a velocidade de ascensão da bolha em um meio infinito. A velocidade de difusão para uma fase  $k$  é definida como a velocidade relativa da fase em relação à velocidade de mistura para o centro de massa (ISHII; HIBIKI, 2011):

$$V_{km} = v_k - V_m \quad (2.51)$$

A velocidade de mistura para o centro de massa é definida como:

$$V_m = \frac{(1 - \alpha)\rho_1 v_1 + \alpha\rho_2 v_2}{\rho_m} \quad (2.52)$$

E a massa específica da mistura é definida como:

$$\rho_m = (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2 \quad (2.53)$$

Logo, a partir das Equações (2.51) e (2.52) para as fases líquida e gasosa, temos:

$$V_{1m} = v_1 - V_m \quad (2.54)$$

$$V_{2m} = v_2 - V_m \quad (2.55)$$

$$\rho_m V_{1m} = \rho_m v_1 - [(1 - \alpha)\rho_1 v_1 + \alpha\rho_2 v_2] \quad (2.56)$$

$$\rho_m V_{2m} = \rho_m v_2 - [(1 - \alpha)\rho_1 v_1 + \alpha\rho_2 v_2] \quad (2.57)$$

Substituindo a definição da massa específica da mistura dada pela Equação (2.53) no lado direito das Equações (2.56) e (2.57) e simplificando temos:

$$\rho_m V_{1m} = -\alpha \rho_2 \overbrace{(v_2 - v_1)}^{v_s} \quad (2.58)$$

$$\rho_m V_{2m} = (1 - \alpha) \rho_1 \overbrace{(v_2 - v_1)}^{v_s} \quad (2.59)$$

Substituindo a Equação (2.17) nas Equações (2.58) e (2.59):

$$\rho_m V_{1m} = -\alpha \rho_2 v_s \quad (2.60)$$

$$\rho_m V_{2m} = (1 - \alpha) \rho_1 v_s \quad (2.61)$$

Isolando a massa específica da mistura e a velocidade relativa entre as fases com o objetivo de relacionar as Equações (2.60) e (2.61), temos:

$$-\frac{V_{1m}}{\alpha \rho_2} = \frac{v_s}{\rho_m} = \frac{V_{2m}}{(1 - \alpha) \rho_1} \quad (2.62)$$

$$(1 - \alpha) \rho_1 V_{1m} + \alpha \rho_2 V_{2m} = 0 \quad (2.63)$$

A Equação (2.63) pode ser reescrita:

$$V_{2m} = -\frac{(1 - \alpha) \rho_1}{\alpha \rho_2} V_{1m} = \frac{(1 - \alpha) \rho_1}{\rho_m} v_s \quad (2.64)$$

Pretende-se relacionar a relação cinemática expressa pela Equação (2.62) com a velocidade de escorregamento:

$$\tilde{V}_{2J} = (1 - \alpha) v_s \quad (2.65)$$

Substituindo a Equação (2.65) na Equação (2.64), temos:

$$V_{2m} = -\frac{(1 - \alpha) \rho_1}{\alpha \rho_2} V_{1m} = \frac{(1 - \alpha) \rho_1}{\rho_m} v_s = \frac{\rho_1}{\rho_m} \tilde{V}_{2J} \quad (2.66)$$

A relação cinemática expressa na Equação (2.66) é interessante, pois ao se definir o fluxo de escorregamento para a fase gasosa, as velocidades de difusão e a velocidade relativa também estariam definidas, logo o problema estaria fechado, restando definir somente uma propriedade. O modelo expresso pela Equação (2.49) é generalista e tridimensional, sendo amplamente utilizado nos códigos CFD para a simulação numérica tridimensional de escoamentos multifásicos a partir do modelo de mistura, o que resta seria definir a velocidade de ascensão da bolha em um meio infinito e estacionário e o coeficiente de difusão, o primeiro definido experimentalmente e o segundo geralmente igualado à viscosidade turbulenta (ALHANATI, 1993). Portanto, uma possibilidade seria projetar o fluxo de escorregamento na direção de interesse, neste caso na direção radial. Esta abordagem já é amplamente utilizada para geração dos mapas de padrão de escoamento onde as velocidades de ascensão das bolhas (esféricas, distorcidas, Taylor, etc.), são simplesmente projetadas ao longo do eixo de simetria do duto sem maiores considerações (BARNEA, 1987; TAITEL; BARNEA; DUKLER, 1980).

Combinando a Equação (2.65) com a Equação (2.50), temos:

$$\tilde{V}_{2J} = (1 - \alpha)v_s = V_\infty(1 - \alpha)^n \quad (2.67)$$

$$v_s = V_\infty(1 - \alpha)^{n-1} \quad (2.68)$$

Lembrando que a velocidade relativa pode ser decomposta nas direções longitudinal e radial:

$$v_{sz} = V_{\infty z}(1 - \alpha)^{n-1} \quad (2.69)$$

$$v_{sr} = V_{\infty r}(1 - \alpha)^{n-1} \quad (2.70)$$

onde:

$$V_{\infty z} = V_\infty \sin \theta \quad (2.71)$$

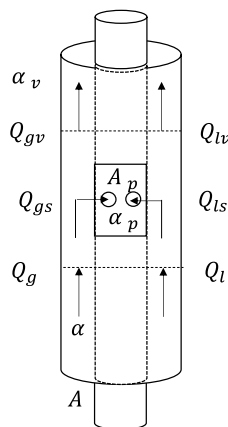
$$V_{\infty r} = V_\infty \cos \theta \quad (2.72)$$

As frações de vazio das Equações (2.69) e (2.70) são locais, ou seja, no duto anular seria  $\alpha$  e no *intake*  $\alpha_p$ . Substituindo a Equação (2.70) na Equação (2.43), temos:

$$E = 1 - \left[ \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \right] \left[ \frac{\alpha_p}{(1 - \alpha_p)} \right] \left\{ 1 - \left( \frac{A_p}{A} \right) \left( \frac{V_{\infty r}}{v_{1r}} \right) (1 - \alpha_p)^{n-1} \right\} \quad (2.73)$$

Se adotássemos a hipótese de Alhanati (1993) de que a fração de vazios no *intake* seria igual à entregue pelo duto anular, o modelo já estaria fechado, pois bastaria obter o fluxo de escorregamento do respectivo padrão de escoamento no duto anular, calcular a fração de vazio com este fluxo projetado ao longo do eixo do duto, projetar este mesmo fluxo na direção radial e de posse da fração de vazios e do escorregamento radial calcular a eficiência dada pela Equação (2.73). Porém, com a mudança da direção do escoamento e a aceleração convectiva radial, teríamos uma mudança no escorregamento que levaria à uma fração de vazios diferente no volume de controle à frente do *intake*. A pergunta que nos resta é o quão importante este fenômeno seria e quais seriam os efeitos na eficiência final, pois podemos adicionar complexidade desnecessária à um modelo que por sua gênese se propõe a ser simplificado e que só teríamos um ganho real se honrássemos o máximo de variáveis possíveis, ou seja, caminhando rumo a resolver tal problema através de técnicas de CFD.

Ao analisar a Equação (2.73), percebe-se que o modelo de Alhanati (1993) despreza o fator de forma ao desprezar o escorregamento radial. Márquez (2004) propõe a divisão do domínio nos volumes de controle expressos na Figura 2.18, um para o fim do duto anular, um para a região do *intake* e outro para o topo do duto anular, com a finalidade de estimar a fração de vazio *in situ* na região do *intake*.



**Figura 2.18** – Volumes de Controle para a análise proposta por Márquez (2004)

Para o duto anular, pode-se escrever a relação cinemática para a velocidade relativa:

$$v_{sz} = \frac{j_2}{\alpha} - \frac{j_1}{(1 - \alpha)} \quad (2.74)$$

Substituindo a Equação (2.69) na Equação (2.74):

$$V_{\infty z} \alpha (1 - \alpha)^n = (1 - \alpha) j_2 - \alpha j_1 \quad (2.75)$$

A Equação (2.75) já seria suficiente para calcular a fração de vazio no duto anular. Para o volume de controle à frente do *intake*, Márquez (2004) assume que na direção vertical a velocidade do líquido pode ser desprezada, pois seria toda direcionada radialmente para o *intake*, portanto pode-se escrever:

$$V_{\infty z} \alpha_p (1 - \alpha_p)^{n-1} = j_2 \quad (2.76)$$

A abordagem expressa pela Equação (2.76) possui a deficiência de desprezar totalmente a velocidade vertical da fase líquida quando o que realmente ocorre é a gradual redução desta velocidade na medida em que o líquido é direcionado ao *intake*, além de ignorar a parcela do gás que é progressivamente sugada pelo *intake*.

Para o volume de controle acima do *intake* representado na Figura 2.18, considerando somente a vazão do gás ventilada para o topo, temos:

$$V_{\infty z} \alpha_v (1 - \alpha_v)^{n-1} = E j_2 \quad (2.77)$$

Márquez (2004) propõe que o problema estaria totalmente definido se o sistema ditado pelas Equações (2.73), (2.75), (2.76) e (2.77) fosse resolvido. Para a solução da Equação (2.73) resta definir a fração de gás no *intake* que pode ser estimada pela Equação (2.76), a velocidade de escorregamento radial e o coeficiente  $n$ , porém como os dados utilizados por Márquez (2004) se concentravam no padrão golfadas e agitante, propõe-se, baseado na literatura, que o efeito das outras bolhas seja ignorado, portanto  $n = 1$  (MARQUEZ, 2004). Sendo assim, a Equação (2.73) fica:



$$E = 1 + \left[ \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \right] \left[ \frac{\alpha_p}{(1 - \alpha_p)} \right] \left[ \left( \frac{A_p}{A} \right) \left( \frac{V_{\infty r}}{j_1} \right) - 1 \right] \quad (2.78)$$

Substituindo a Equação (2.76) na Equação (2.78), temos:

$$E = 1 + \left[ \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \right] \left( \frac{j_2}{V_{\infty z}} \right) \left[ \left( \frac{A_p}{A} \right) \left( \frac{V_{\infty r}}{j_1} \right) - 1 \right] \quad (2.79)$$

$$E = 1 - \left[ \left( \frac{j_1}{V_{\infty z}} \right) - \left( \frac{A_p}{A} \right) \left( \frac{V_{\infty r}}{V_{\infty z}} \right) \right] \quad (2.80)$$

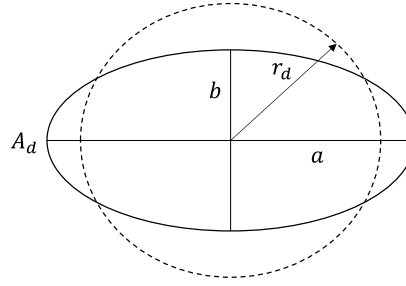
Lembrando que a Equação (2.80) assume que o padrão de escoamento é golfadas ou agitante, além de possuir as falhas apontadas para a Equação (2.76) utilizada em sua gênese.

## 2.6 Velocidade de Ascensão de uma Bolha

Os modelos revisados na Seção 2.5 dependem da definição de  $V_{\infty}$ , portanto esta seção é dedicada a revisar o processo de derivação da velocidade de ascensão de uma bolha em um meio infinito estacionário. Seja o coeficiente de arrasto de uma bolha distorcida  $C_d$ :

$$C_d = - \frac{F_d}{\frac{1}{2} \rho_1 V_{\infty}^2 A_d} \quad (2.81)$$

onde  $F_d$  é a força de arrasto,  $\rho_1$  é a massa específica do meio contínuo,  $V_{\infty}$  é a velocidade terminal de ascensão em um meio estático e infinito. A área da partícula projetada no plano ortogonal à direção de deslocamento é  $A_d$  e o raio equivalente  $r_d$  é definido como o raio de uma esfera perfeita com o mesmo volume do que a bolha distorcida, como exibido na Figura 2.19:



**Figura 2.19** – Geometria da bolha distorcida

Define-se o coeficiente de arrasto para uma bolha esférica perfeita equivalente  $C_d^*$ :

$$C_d^* = -\frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho_1 V_\infty^2 \pi r_d^2} \quad (2.82)$$

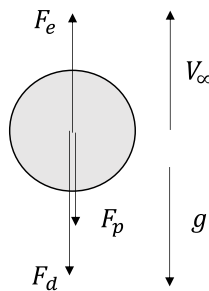
Os coeficientes de arrasto definidos pelas Equações (2.81) e (2.82) podem ser relacionados da seguinte forma através do fator de forma  $\epsilon$ :

$$C_d^* = \epsilon^2 C_d \quad (2.83)$$

$$\epsilon^2 = \frac{A_d}{\pi r_d^2} \quad (2.84)$$

Seja o balanço de forças de uma bolha esférica perfeita equivalente em um meio estático e infinito definido como na Figura 2.20:

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow F_e - F_d - F_p = 0 \quad (2.85)$$



**Figura 2.20** – Balanço de forças em uma bolha perfeitamente esférica em um meio estático e infinito.

onde  $F_e$  representa o empuxo e  $F_p$  o peso. Escrevendo a Equação (2.85) termo a termo:

$$\overbrace{\left(\frac{4}{3}\pi r_d^3\right)\rho_1 g}^{F_e} - \overbrace{\left(\frac{4}{3}\pi r_d^3\right)\rho_2 g}^{F_p} - \overbrace{\frac{1}{2}\rho_1 V_\infty^2 (\pi r_d^2) C_d^*}^{F_d} = 0 \quad (2.86)$$

Isolando  $V_\infty$  da Equação (2.86), temos:

$$V_\infty = \sqrt{\frac{8 r_d (\rho_1 - \rho_2) g}{3 C_d^* \rho_1}} \quad (2.87)$$

Usando a definição do fator de forma dada pela Equação (2.83), temos:

$$V_\infty = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{8 r_d (\rho_1 - \rho_2) g}{3 C_d \rho_1}} \quad (2.88)$$

Uma bolha perfeitamente esférica possui fator de forma unitário, logo a velocidade terminal desta em um meio estacionário e infinito seria:

$$V_{\infty e} = \sqrt{\frac{8 r_d (\rho_1 - \rho_2) g}{3 C_d \rho_1}} \quad (2.89)$$

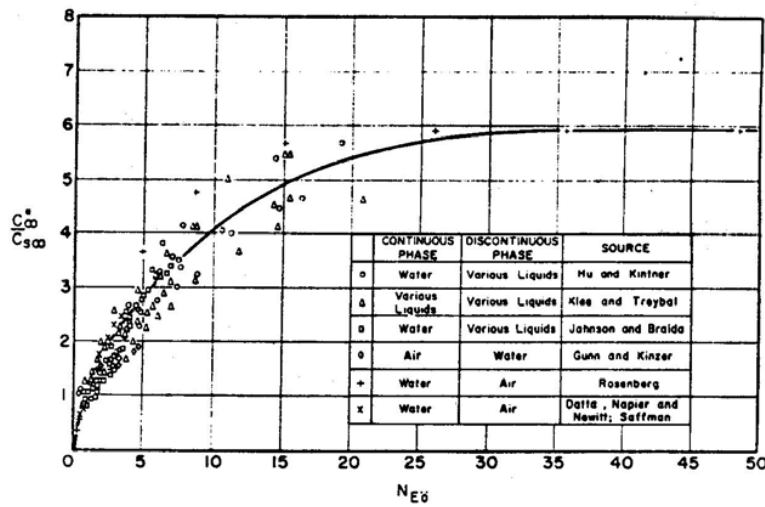
Harmathy (1960) observou experimentalmente que sob escoamento turbulento, o coeficiente de arrasto é afetado pelo formato das bolhas somente, logo pode-se escrever a relação entre as velocidades terminais das bolhas perfeitamente esféricas e distorcidas como uma função do formato das bolhas (HARMATHY, 1960):

$$\frac{V_\infty}{V_{\infty e}} = \sqrt{\frac{C_d}{C_d^*}} = \varphi(\text{formato}) \quad (2.90)$$

Hinze (1955) propôs que o formato de uma bolha depende unicamente do número de Eötvös (HINZE, 1955):

$$N_{Eo} = \frac{4r_d^2(\rho_1 - \rho_2)g}{\sigma} \quad (2.91)$$

Por isso Harmathy (1960) estudou o comportamento da razão expressa pela Equação (2.90) em função do número de Eötvos a partir de dados experimentais da literatura, como ilustrado na Figura 2.21:



**Figura 2.21** – Comportamento do arrasto em função do número de Eötvos (HARMATHY, 1960).

Para a região na Figura 2.21 com o Número de Eötvos inferior à 13 (corresponde ao limite da região de bolhas distorcidas no formato elipsoidal), foi proposta a seguinte relação para a razão dos coeficientes de arrasto (HARMATHY, 1960):

$$\frac{C_d^*}{C_d} = 1.29\sqrt{N_{Eo}} \quad (2.92)$$

$$\frac{C_d^*}{C_d} = 2.58 \sqrt{\frac{r_d^2(\rho_1 - \rho_2)g}{\sigma}} \quad (2.93)$$

A partir das Equações (2.87) e (2.93), aproximando o coeficiente de arrasto para bolhas perfeitamente esféricas para 0.44, temos (HARMATHY, 1960):

$$C_d^* = 1.1352 \sqrt{\frac{r_d^2 (\rho_1 - \rho_2) g}{\sigma}} \quad (2.94)$$

$$V_\infty = 1.53 \left[ \frac{\sigma (\rho_1 - \rho_2) g}{\rho_1^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2.95)$$

O interessante a ser notado nesta breve revisão é que a velocidade terminal é fruto do balanço de forças em uma bolha, mesmo que o modelo seja derivado de correlações obtidas a partir de dados experimentais, o processo de derivação do modelo de escorregamento advém de um equilíbrio de forças o que pode ser reproduzido para o problema do separador anular levemente inclinado em relação à horizontal.

## 2.7 Estimativa do Escorregamento Radial

O objetivo desta seção é revisar o procedimento utilizado por Márquez (2004) para estimar o escorregamento radial em um separador anular vertical, visando futuramente extrapolá-lo para a discussão do escorregamento radial para o caso inclinado. O procedimento adotado é inspirado nos trabalhos de Wallis (1969) e Ishii e Zuber (1979) (ISHII; ZUBER, 1979; MARQUEZ, 2004; WALLIS, 1969)

Parte-se do modelo de dois fluidos escrito para coordenadas cilíndricas, em regime permanente, com propriedades localmente constantes, desprezando os efeitos das tensões interfaciais e sem transferência de massa entre as fases. Além das hipóteses já descritas, assume-se simetria axial. Desta forma, sob tais hipóteses, tem-se:

- Equação de Conservação da Massa:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha_k \rho_k r v_{kr}) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_k \rho_k v_{kz}) = 0 \quad (2.96)$$

- Equação de Conservação de Momento na direção radial (forma não conservativa):

$$\alpha_k \rho_k \left( v_{kr} \frac{\partial v_{kr}}{\partial r} + v_{kz} \frac{\partial v_{kr}}{\partial z} \right) + \alpha_k \frac{\partial P}{\partial r} - \alpha_k \rho_k g_r + M_{kr} = 0 \quad (2.97)$$

- Equação de Conservação de Momento na direção vertical (forma não conservativa):

$$\alpha_k \rho_k \left( v_{kr} \frac{\partial v_{kz}}{\partial r} + v_{kz} \frac{\partial v_{kz}}{\partial z} \right) + \alpha_k \frac{\partial P}{\partial z} - \alpha_k \rho_k g_z + M_{kz} = 0 \quad (2.98)$$

onde  $v_{kz}$  e  $v_{kr}$  representam as velocidades da fase  $k$  nas direções vertical e radial,  $P$ ,  $M_k$ ,  $\alpha_k$  e  $\rho_k$  são a pressão (assumida igual para ambas as fases), transferência de momento interfacial, fração volumétrica e a massa específica para a fase  $k$ ,  $g_r$  e  $g_z$  são as projeções radial e vertical da aceleração da gravidade.

Para o escorregamento vertical, assume-se o equilíbrio de forças na direção vertical somente, ignorando os termos convectivos, similar ao proposto por Wallis (1969) para escoamentos dominados por gravidade sem cisalhamento na parede (WALLIS, 1969). Desta forma, a Equação (2.98) da conservação do momento na direção vertical para ambas as fases pode ser reescrita:

$$\alpha_1 \frac{\partial P}{\partial z} - \alpha_1 \rho_1 g_z + M_{1z} = 0 \quad (2.99)$$

$$\alpha_2 \frac{\partial P}{\partial z} - \alpha_2 \rho_2 g_z + M_{2z} = 0 \quad (2.100)$$

Ao somar as Equações (2.99) e (2.100), cancela-se a transferência de momento interfacial, pois por definição ambos têm o mesmo módulo e sinais contrários (o momento que uma fase recebe é doado pela outra fase, logo detêm a mesma magnitude e direções opostas):

$$\overbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}^{=1} \frac{\partial P}{\partial z} - \overbrace{(\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2)}^{\rho_m} g_z = 0 \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho_m g_z \quad (2.102)$$

Pode-se reescrever as Equações (2.99) e (2.100) da seguinte forma:

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_1 g_z - \frac{M_{2z}}{\alpha_1} = 0 \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_2 g_z + \frac{M_{2z}}{\alpha_2} = 0 \quad (2.104)$$

Subtraindo as Equações (2.103) e (2.104) temos:

$$M_{2z} = (1 - \alpha)\alpha(\rho_1 - \rho_2)g_z \quad (2.105)$$

O termo  $M_{2z}$  representa a transferência de momento da fase líquida para a fase gasosa por unidade de volume. Se desprezadas as forças de sustentação e difusão devido ao gradiente de concentração, pode-se afirmar que representa a força de arrasto líquida nas bolhas (WALLIS, 1969). Esta força de arrasto líquida por unidade de volume pode ser modelada (ZUBER, 1964):

$$M_{2z} = -\frac{\alpha F_{dz}}{B_d} \quad (2.106)$$

onde  $F_d$  e  $B_d$  são as forças de arrasto e o volume de uma bolha com um raio típico:

$$F_{dz} = -\frac{1}{2}C_d\rho_1(\pi r_d^2)v_{sz}|v_s| \quad (2.107)$$

$$B_d = \frac{4}{3}\pi r_d^3 \quad (2.108)$$

Os termos das Equações (2.107) e (2.108) são os mesmos utilizados na seção anterior, porém deve-se dar atenção especial para as velocidades relativas  $v_s$  e  $v_{sz}$ , que representam o escorregamento total e o projetado na direção vertical. Substituindo as Equações (2.105), (2.107) e (2.108) na (2.106), temos:

$$(1 - \alpha)\alpha(\rho_1 - \rho_2)g_z = \frac{\alpha \frac{1}{2} C_d \rho_1 (\pi r_d^2) v_{sz} |v_s|}{\frac{4}{3} \pi r_d^3} \quad (2.109)$$

$$v_{sz} |v_s| = \frac{8 r_d (1 - \alpha) (\rho_1 - \rho_2) g_z}{3 C_d \rho_1} \quad (2.110)$$

Se considerarmos somente uma bolha, ao contrário do enxame e escoamento vertical (ISHII; ZUBER, 1979):

$$C_{d\infty} = \frac{C_d}{(1 - \alpha)} \quad (2.111)$$

$$V_{\infty z}^2 = \frac{8}{3} \frac{r_d}{C_{d\infty}} \frac{(\rho_1 - \rho_2) g_z}{\rho_1} \quad (2.112)$$

Segundo Harmathy (1960) o coeficiente de arrasto é dado por:

$$C_{d\infty} = \frac{4}{3} r_d \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2) g_z}{\sigma}} \quad (2.113)$$

Substituindo a Equação (2.113) na (2.112) temos:

$$V_{\infty z} = \sqrt{2} \left[ \frac{\sigma (\rho_1 - \rho_2) g_z}{\rho_1^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2.114)$$

Ishii (1979) recomenda o uso da expressão (2.114) para a velocidade terminal para o padrão bolhas (ISHII; ZUBER, 1979). Para a velocidade de escorregamento na direção radial, Márquez (2004) propõe que a hipótese de equilíbrio de forças adotada por Wallis (1969) e Ishii e Zuber (1979) não seria aplicável, pois há uma variação brusca da direção do escoamento da direção vertical para a direção radial, portanto os termos convectivos não poderiam ser ignorados. Logo, a partir da Equação (2.97) da conservação do momento na direção radial para ambas as fases, temos:



$$\alpha_1 \rho_1 \left( v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + v_{1z} \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) + \alpha_1 \frac{\partial P}{\partial r} - \alpha_1 \rho_1 g_r + M_{1r} = 0 \quad (2.115)$$

$$\alpha_2 \rho_2 \left( v_{2r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + v_{2z} \frac{\partial v_{2r}}{\partial z} \right) + \alpha_2 \frac{\partial P}{\partial r} - \alpha_2 \rho_2 g_r + \overbrace{M_{2r}}^{=-M_{1r}} = 0 \quad (2.116)$$

Soma-se as Equações (2.115) e (2.116) afim de eliminar a transferência de momento entre as fases:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \rho_1 \left( v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + v_{1z} \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) + \alpha_2 \rho_2 \left( v_{2r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + v_{2z} \frac{\partial v_{2r}}{\partial z} \right) \\ + \overbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}^{=1} \frac{\partial P}{\partial r} - \overbrace{(\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2)}^{\rho_m} g_r = 0 \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + v_{1z} \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} + \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \overbrace{\left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}^{\ll 1} \right] \left( v_{2r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + v_{2z} \frac{\partial v_{2r}}{\partial z} \right) + \frac{1}{\alpha_1 \rho_1} \frac{\partial P}{\partial r} \\ - \frac{\rho_m}{\alpha_1 \rho_1} g_r = 0 \end{aligned} \quad (2.118)$$

Como a massa específica do líquido é muito superior à do gás, pode-se simplificar a Equação (2.118):

$$v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + v_{1z} \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} + \overbrace{v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r}}^{\ll v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r}} + \frac{1}{\alpha_1 \rho_1} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\rho_m}{\alpha_1 \rho_1} g_r = 0 \quad (2.119)$$

Como a maioria do líquido é sugada pelo o *intake*, a aceleração convectiva radial da fase líquida é muito superior a vertical, logo:

$$\alpha_1 \rho_1 v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} - \rho_m g_r = 0 \quad (2.120)$$

Para o anular vertical estudado por Márquez (2004) não há componente radial da aceleração da gravidade, portanto, a Equação (2.120) fica:

$$\alpha_1 \rho_1 v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} = - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (2.121)$$

A Equação (2.121) nos diz que o gradiente radial de pressão é dominado pela aceleração convectiva da fase líquida na direção radial. Sob as hipóteses supracitadas, substituindo a Equação (2.121) na Equação (2.116) da conservação de momento radial para a fase gasosa, visando obter o termo de transferência de momento entre as fases, temos:

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \overbrace{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}^{\ll 1} \left(v_{2r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + v_{2z} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z}\right) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \rho_1} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{M_{2r}}{\alpha_1 \rho_1} = 0 \quad (2.122)$$

$$M_{2r} = -\alpha_2 \frac{\partial P}{\partial r} \quad (2.123)$$

$$M_{2r} = \alpha(1 - \alpha) \rho_1 v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \quad (2.124)$$

O termo  $M_{2r}$  representa a transferência de momento da fase líquida para a fase gasosa por unidade de volume na direção radial, se desprezadas as forças de sustentação e difusão devido ao gradiente de concentração, pode-se afirmar que representa a força de arrasto líquida nas bolhas (WALLIS, 1969). Esta força de arrasto líquida por unidade de volume pode ser modelada (ZUBER, 1964):

$$M_{2r} = - \frac{\alpha F_{dr}}{B_d} \quad (2.125)$$

Onde  $F_d$  e  $B_d$  são as forças de arrasto e o volume de uma bolha com um raio típico dado pela Equação (2.108):

$$F_{dr} = - \frac{1}{2} C_d \rho_1 (\pi r_d^2) v_{sr} |v_s| \quad (2.126)$$

Substituindo as Equações (2.108), (2.124) e (2.126) na Equação (2.125), temos:

$$v_{sr}|v_s| = \frac{8}{3} \frac{r_d(1-\alpha)}{C_d} v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \quad (2.127)$$

De forma similar ao feito anteriormente, se considerarmos o coeficiente de arrasto para uma bolha somente e que a velocidade de escorregamento radial é muito maior que a vertical, temos (ISHII; ZUBER, 1979):

$$C_{d\infty} = \frac{C_d}{(1-\alpha)} \quad (2.128)$$

$$v_{sr}|v_s| \cong v_{sr}^2 \quad (2.129)$$

Substituindo na Equação (2.127):

$$V_{\infty r}^2 = \frac{8}{3} \frac{r_d}{C_{d\infty}} v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \quad (2.130)$$

Para finalizar, se dividirmos as Equações (2.127) e (2.110), será obtida a razão de escorregamento necessária para fechar o modelo proposto por Márquez (2004) na Equação (2.80):

$$\frac{v_{sr}}{v_{sz}} = \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho_2)g_z} v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \quad (2.131)$$

É importante ressaltar que a abordagem que leva à razão das velocidades relativas possui a vantagem de escapar das definições do raio característico e do coeficiente de arrasto para a bolha, ambos os termos são cortados na divisão por serem relativos ao mesmo padrão de escoamento no interior do volume de controle do *intake*, logo estes parâmetros são iguais para qualquer direção por serem propriedades intrínsecas do padrão de escoamento e ligada à geometria das bolhas (MARQUEZ, 2004). Esta afirmação somente será verdadeira se, e somente se, as bolhas forem totalmente simétricas para todas as direções do escoamento, o que pode ser razoável para o padrão de bolhas dispersas, porém não se aplica a uma bolha alongada ou uma bolha de Taylor

Das Equações (2.69) e (2.70) advindas da definição do modelo de fluxo de escorregamento tridimensional (ISHII; HIBIKI, 2011):

$$\frac{v_{sr}}{v_{sz}} = \frac{V_{\infty r}}{V_{\infty z}} \quad (2.132)$$

Logo, o problema de separação gravitacional em dutos anulares verticais estaria totalmente representado pelo seguinte sistema de equações (MARQUEZ, 2004):

$$\frac{V_{\infty r}}{V_{\infty z}} = \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho_2)g_z} v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \quad (2.133)$$

$$E = 1 - \left[ \left( \frac{j_1}{V_{\infty z}} \right) - \left( \frac{A_p}{A} \right) \left( \frac{V_{\infty r}}{V_{\infty z}} \right) \right] \quad (2.134)$$

A partir deste ponto, Márquez (2004) parte para uma regressão dos dados experimentais da base de dados do TUALP ou para um modelo mecanicista simplificado visando estimar a aceleração convectiva, porém aplicado apenas para a geometria vertical. O termo da aceleração convectiva pode ser simplificado da seguinte forma:

$$v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{1r}^2}{2} \right) \cong \frac{1}{2(r_e - r_i)} (v_{1r}^2|_{r=r_e} - v_{1r}^2|_{r=r_i}) \quad (2.135)$$

Como todo o líquido é sugado para o *intake* e através da condição de contorno de não deslizamento:

$$v_{1r}^2|_{r=r_e} = 0 \quad (2.136)$$

$$v_{1r}^2|_{r=r_i} = \left( -j_1 \frac{A}{A_p} \right)^2 \quad (2.137)$$

Substituindo as Equações (2.136) e (2.137) na Equação (2.135):

$$v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \cong -\frac{1}{(D_e - D_i)} \left( j_1 \frac{A}{A_p} \right)^2 \quad (2.138)$$

Por simplicidade na nomenclatura, a partir deste ponto será adotado o sinal de igualdade, porém trata-se de uma aproximação, como indicado na Equação (2.138). Substituindo a Equação (2.138) na Equação (2.133):

$$\frac{V_{\infty r}}{V_{\infty z}} = -\frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho_2)g_z} \frac{1}{D_H} \left( j_1 \frac{A}{A_p} \right)^2 \quad (2.139)$$

Como no volume de controle do *intake* temos o mesmo padrão de escoamento, não importando a direção que observamos, podemos expressar o escorregamento radial a partir da razão com o escorregamento vertical, evitando assim a definição da dimensão característica e do coeficiente de arrasto específico para esta direção, portanto:

$$V_{\infty r} = -\left[ \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho_2)g_z} \right] \frac{j_1^2}{D_H} \left( \frac{A}{A_p} \right)^2 V_{\infty z} \quad (2.140)$$

A Equação (2.140) e todo o processo para sua dedução ilustra que é possível estimar o escorregamento radial a partir de um modelo semi-analítico. Resta agora extrapolar o procedimento para o caso inclinado e comparar com os dados experimentais, o que será feito na Seção 5.2. Porém, a principal inconsistência com a Equação (2.140) deve-se ao fato dela crescer indefinidamente com a velocidade superficial da fase líquida, enquanto que o resultado físico pressupõe que o escorregamento deveria crescer até um limite em que a razão entre o escorregamento e a velocidade de mistura seja desprezível, ou seja, que leve ao modelo homogêneo para altíssimas vazões, tendendo ao infinito. Acredita-se que a causa raiz desta inconsistência deve-se ao fato da aceleração convectiva vertical e outras forças que atuam sobre a bolha (forças de massa adicionada, *Bassset*, etc.) terem sido ignoradas.

### 3 APARATO EXPERIMENTAL

O objetivo do aparato experimental concebido neste trabalho é reproduzir a morfologia do escoamento bifásico no interior da cápsula do SKID BCSS e permitir a coleta de dados operacionais para a análise detalhada do processo de separação de fluidos. A montagem experimental foi concebida no Laboratório Experimental de Petróleo “Kelsen Valente Serra” (LABPETRO), localizado no Centro de Estudos do Petróleo CEPETRO da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), laboratório constituído de uma ampla estrutura necessária para a construção da bancada e a execução do projeto.

#### 3.1 Análise Dimensional

O objetivo desta seção é realizar a análise dimensional com o intuito de estudar o problema da separação natural gás-líquido em dutos anulares. As relações obtidas aqui serão utilizadas para um estudo de caso com dados de campo cujas informações foram fornecidas pela Petrobras.

Pode-se afirmar que o fenômeno de separação natural depende de parâmetros relacionados à geometria do duto anular, propriedades PVT e de transporte dos fluidos além de variáveis de escoamento. Portanto, pode-se elencar as principais variáveis que impactam o fenômeno sob estudo:

$$Q_{gv} = f(L, L_h, D_e, D_i, \rho_1, \mu_1, \rho_2, \mu_2, \sigma_{21}, Q_l, Q_g, P, D_b, g_\theta, \dots) \quad (3.1)$$

onde  $Q_{gv}$  representa a vazão de gás separada que migra para o topo do duto anular, as variáveis geométricas  $L, L_h, D_e$  e  $D_i$  representam o comprimento, a elevação vertical, diâmetros externo e interno do duto anular respectivamente. As propriedades PVT e de transporte  $\rho_1, \mu_1, \rho_2, \mu_2$  e  $\sigma$  representam as massas específicas e viscosidades das fases líquida (subscrito 1) e gasosa (subscrito 2) e a tensão superficial entre as fases respectivamente. Por fim, as variáveis de escoamento  $Q_l, Q_g, P, D_b$  representam as vazões volumétricas das fases líquida e gasosa, a pressão de operação e o diâmetro característico das bolhas. Dentre outras variáveis consideradas

menos importantes, acrescentou-se a aceleração da gravidade devido à importância do empuxo para o processo de separação. A Equação (3.1) pode ser reescrita de uma forma generalista:

$$f'(\vec{q}) = 0 \quad (3.2)$$

onde  $q_i$  representa as  $n$  variáveis físicas com as  $k$  dimensões fundamentais da mecânica:

$$\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\} \quad (3.3)$$

Neste caso em particular, as dimensões fundamentais da mecânica para descrever as variáveis listadas são comprimento, massa e tempo, portanto  $k = 3$ .

$$\vec{q} = \{Q_{gv}, L, h, D_e, D_i, h, \rho_1, \mu_1, \rho_2, \mu_2, \sigma_{21}, Q_l, Q_g, P, D_b, g_\theta, \dots\} \quad (3.4)$$

A partir do Teorema dos  $\pi$  de Buckingham, a Equação (3.2) pode ser reescrita (PANTON, 2013; WHITE, 1998, 2006):

$$F(\vec{\pi}) = 0 \quad (3.5)$$

onde  $\pi_i$  representa os  $p = n - k$  grupos adimensionais:

$$\vec{\pi} = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_p\} \quad (3.6)$$

Os grupos adimensionais se relacionam com as variáveis físicas a partir dos expoentes inteiros  $a_i$ :

$$\pi_i = q_1^{a_1} q_2^{a_2} q_3^{a_3} \dots q_n^{a_n} \quad (3.7)$$

Se considerarmos as variáveis fundamentais da mecânica e as variáveis físicas listadas na Equação (3.4) como espaços vetoriais, sendo o espaço das variáveis fundamentais da mecânica a base do sistema de coordenadas utilizado, pode-se escrever cada variável citada como uma combinação entre as dimensões fundamentais da mecânica, estas relações podem ser

agrupadas em uma transformação linear  $[M]$  entre estes dois espaços vetoriais (PANTON, 2013; WHITE, 1998, 2006):

$$[M] = \begin{matrix} & \begin{matrix} [L & \rho & \mu & \sigma & P & Q & g_\theta] \end{matrix} \\ \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 \end{matrix} \right] \end{matrix} & \begin{bmatrix} L \\ M \\ T \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.8)$$

Deve-se ressaltar que as variáveis que possuem as mesmas dimensões foram omitidas por serem redundantes e que os adimensionais triviais (razões, proporções, ângulos e números puros) serão considerados separadamente. Os números adimensionais são o *kernel* da transformação linear  $[M]$ , portanto, para obtê-los, basta resolver o sistema linear expresso na Equação (3.9) buscando um conjunto não único de soluções no espaço dos números inteiros:

$$[M] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Dentre os números adimensionais triviais, pode-se destacar:

- **Razão de aspecto:** todas as proporções relacionadas à dimensão espacial serão similares por usarmos o conceito da razão de aspecto  $\varepsilon$  durante o projeto da bancada, definida pelo quociente entre as dimensões características do dispositivo real (sobrescrito R) e do modelo (sobrescrito M), como ditado pela Equação (3.10).

$$\frac{L^R}{L^M} = \frac{D_e^R}{D_e^M} = \frac{D_i^R}{D_i^M} = \varepsilon \quad (3.10)$$

- **Inclinação:** número adimensional trivial relativo ao comprimento do duto e a elevação vertical.

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{L_h}{L} \right) \quad (3.11)$$

- **Fração de vazios sem escorregamento:** número adimensional definido como a relação entre a vazão volumétrica de gás pela vazão volumétrica de mistura:



$$\lambda = \frac{Q_g}{Q_m} \quad (3.12)$$

- **Eficiência de Separação:** número adimensional mais importante e objeto de estudo deste trabalho, dado pela proporção entre as vazões volumétricas de gás separada que migra para o topo do duto anular e a de entrada:

$$E = \frac{Q_{gv}}{Q_g} \quad (3.13)$$

A partir da solução do sistema linear expresso na Equação (3.9), buscou-se um conjunto de soluções no espaço dos números inteiros. Das combinações obtidas, eliminadas as de alta ordem (fruto do produto de números adimensionais de ordem mais baixa), foram obtidos e reconhecidos os seguintes grupos adimensionais clássicos (PANTON, 2013; SHOHAM, 2005b; WHITE, 1998, 2006):

- **Número de Reynolds:** definido como a razão entre forças inerciais e viscosas, utilizado para mensurar turbulência. Neste trabalho sugere-se o uso do diâmetro hidráulico equivalente definido na Equação (2.5) e das propriedades de mistura, pois além do escoamento ser multifásico, há indícios na literatura de que estes números escritos a partir de parâmetros de mistura definidos nas Equações (3.18), (3.19) e (3.20) são mais representativos. Por exemplo, para o cálculo do gradiente de pressão usam-se fatores de fricção definidos em função do número de Reynolds da mistura (SHOHAM, 2005b; WALLIS, 1969).

$$Re = \frac{\rho_m Q_m}{D_H \mu_m} \quad (3.14)$$

- **Número de Froude:** definido como a relação entre forças inerciais e outra exercida por um campo (gravidade ou rotação), sendo importante em escoamento segregados. Assim como feito para o número de Reynolds, sugere-se o uso do diâmetro hidráulico equivalente e das propriedades de mistura. Por exemplo, o número de Froude escrito para a mistura é utilizado como coordenada no mapa de padrão de escoamento do modelo de Beggs e Brill (SHOHAM, 2005b; WALLIS, 1969).

$$Fr^2 = \frac{Q_m^2}{g_\theta D_H^5} \quad (3.15)$$

- **Número de Eötvos:** definido como a relação entre forças de empuxo e superficiais, ao lado do número de Morton, define formato das bolhas em um escoamento bifásico como indicado na Figura 3.1.

$$Eo = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)D_b^2}{\sigma_{21}} \quad (3.16)$$

- **Número de Morton:** ao lado do número de Eötvos, define formato das bolhas em um escoamento bifásico como indicado na Figura 3.1.

$$Mo = \frac{g\mu_1^4(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1^2 \sigma_{21}^3} \quad (3.17)$$

A vazão de mistura é dada por:

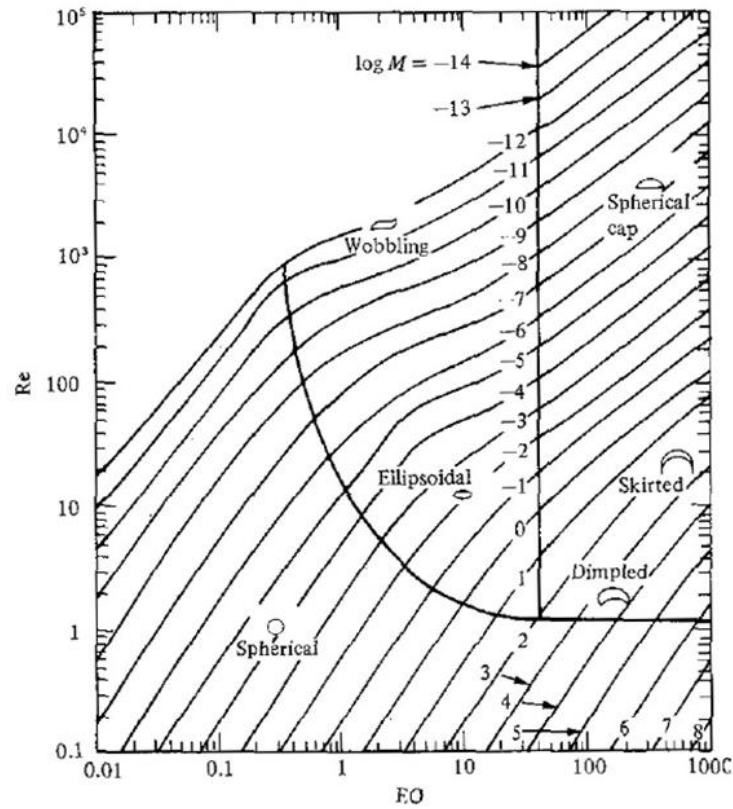
$$Q_m = Q_1 + Q_2 \quad (3.18)$$

A massa específica e a viscosidade da mistura são definidas como:

$$\rho_m = (1 - \lambda)\rho_1 + \lambda\rho_2 \quad (3.19)$$

$$\mu_m = (1 - \lambda)\mu_1 + \lambda\mu_2 \quad (3.20)$$

Os números de Reynolds e de Froude são os mais importantes para a descrição apropriada do escoamento por estarem diretamente ligados à turbulência e à segregação de fluidos. Deve-se ressaltar que a partir destes números é possível definir uma razão de aspecto para o modelo como será demonstrado a seguir. No entanto, os números de Eötvos e Morton não serão similares dada dificuldade em controlar experimentalmente parâmetros como a tensão superficial e o diâmetro de bolhas.



**Figura 3.1** – Mapa da geometria das bolhas (CLIFT; GRACE; WEBER, 1978).

O uso do número de Froude escrito para as propriedades de mistura possui uma vantagem adicional para o caso do escoamento intermitente, por possuir uma relação interessante com a velocidade de ascensão da bolha de Taylor  $V_{TB}$ , como será demonstrado a seguir. Escreve-se a Equação (2.1) relativa ao modelo de fluxo de escorregamento em função da velocidade superficial da fase gasosa:

$$\frac{j_2}{\alpha} = C_0 j_m + V_{\infty TB} \quad (3.21)$$

Dividindo a Equação (3.21) pela velocidade da mistura  $j_m$ , temos:

$$\frac{\lambda}{\alpha} = C_0 + \frac{V_{\infty TB}}{j_m} \quad (3.22)$$

O modelo proposto por Nicklin et al. (1962) para a velocidade de ascensão da bolha de Taylor em um meio infinito e estacionário expresso na Equação (2.2), pode ser substituído na Equação (3.22), portanto, temos:

$$\frac{\lambda}{\alpha} = C_0 + C_1 \frac{\sqrt{gD_H}}{j_m} \quad (3.23)$$

Considerando a definição padrão do número de Froude da mistura, pode-se reescrever a Equação (3.23):

$$\frac{\lambda}{\alpha} = C_0 + C_1 \frac{1}{Fr_m} \quad (3.24)$$

Ou seja, de acordo com a Equação (3.24), para o padrão intermitente, se a fração de vazio sem escorregamento  $\lambda$  e o número de Froude da mistura  $Fr_m$  forem similares entre o modelo e o dispositivo real, a fração de vazio com escorregamento também será para o padrão golfadas ( $C_0$  e  $C_1$  são constantes para o padrão intermitente), pois, a Equação (3.24) representa uma relação direta entre estes parâmetros. Esta é uma propriedade bastante interessante pois, como veremos adiante, o mapa de padrões para a matriz experimental explorada neste trabalho é dominado pelo padrão intermitente. Como a fração de vazio sem escorregamento e o número de Froude da mistura são parâmetros adimensionais honrados neste modelo, esta abordagem possui a vantagem de honrar a fração de vazio *in situ* para o padrão intermitente.

Uma vez definido que serão usadas as propriedades de mistura, pode-se reescrever a Equação (3.5) para os números adimensionais selecionados:

$$E = F'(\theta, \lambda, Re_m, Fr_m) \quad (3.25)$$

Agora nos resta definir a razão de aspecto e as propriedades dos fluidos que serão utilizados como modelo, para então projetarmos a bancada de ensaios. Como o número de Reynolds será constante entre o dispositivo real e o modelo, as vazões de mistura podem ser relacionadas:

$$Re_m = cte \Leftrightarrow \left( \frac{\rho_m Q_m}{D_H \mu_m} \right)_M = \left( \frac{\rho_m Q_m}{D_H \mu_m} \right)_R \quad (3.26)$$

$$Q_m^M = \left[ \left( \frac{\mu_m}{\rho_m} \right)_M \left( \frac{\rho_m}{\mu_m} \right)_R \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] Q_m^R \quad (3.27)$$

O número de Froude também será similar, portanto:

$$Fr_m^2 = cte \Leftrightarrow \left( \frac{Q_m^2}{g_\theta D_H^5} \right)_M = \left( \frac{Q_m^2}{g_\theta D_H^5} \right)_R \quad (3.28)$$

$$Q_m^M = \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{5}{2}} Q_m^R \quad (3.29)$$

Os números de Reynolds e de Froude só serão ambos similares entre modelo e dispositivo real se as Equações (3.27) e (3.29) representarem o mesmo mapeamento entre as vazões de mistura do modelo e do dispositivo real, portanto os coeficientes das Equações (3.27) e (3.29) devem ser iguais:

$$\left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{5}{2}} = \left[ \left( \frac{\mu_m}{\rho_m} \right)_M \left( \frac{\rho_m}{\mu_m} \right)_R \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \quad (3.30)$$

Logo, escreve-se a razão de aspecto como uma função das propriedades de mistura dos fluidos do modelo e do dispositivo real:

$$\varepsilon = \sqrt[3]{ \left[ \left( \frac{\rho_m}{\mu_m} \right)_M \left( \frac{\mu_m}{\rho_m} \right)_R \right]^2 } \quad (3.31)$$

A partir dos dados de operação e das propriedades dos fluidos de um poço modelo, pode-se obter a razão de aspecto que mantém os números de Reynolds e Froude da mistura similares, para tal, basta utilizar a Equação (3.31) com as propriedades de mistura fornecidas. Por fim, em posse da razão de aspecto final, a obtenção da matriz de testes é direta, a partir dos parâmetros de operação do dispositivo real:

$$Q_l^M = \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{5}{2}} Q_l^R \quad (3.32)$$

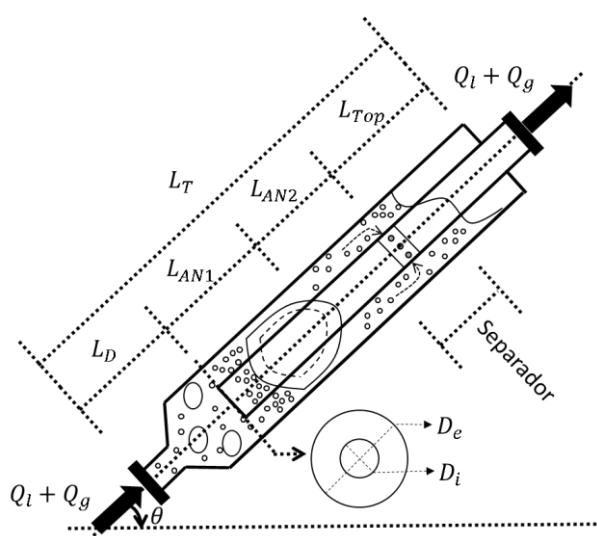
$$\lambda^M = \lambda^R \quad (3.33)$$

Utilizou-se um poço real equipado com um SKID BCSS como referência para o projeto da bancada de testes, cujos dados operacionais foram fornecidos pela Petrobras e exibidos na Tabela 3.1. O envelope operacional deste poço se dá em torno de uma massa específica de mistura de  $\bar{\rho}_m = 669.4 \text{ kg/m}^3$  e viscosidade de mistura  $\bar{\mu}_m = 6.7 \text{ cP}$  a uma fração de vazios sem escorregamento média de  $\bar{\lambda} = 25\%$ . Os limites operacionais do SKID BCSS instalado neste poço serão utilizados para confeccionar a matriz de testes, que consiste de um intervalo de vazão de líquido  $Q_l$  de  $500 \text{ m}^3/\text{d}$  a  $5200 \text{ m}^3/\text{d}$  e fração de vazio sem escorregamento  $\lambda$  de 10% a 50%.

**Tabela 3.1** – Dados operacionais do poço real usado como referência (fonte: Petrobras)

Variável	Valor	Unidade
$\bar{\rho}_m$	669.4	$\text{kg/m}^3$
$\bar{\mu}_m$	6.7	cP
$\bar{\lambda}$	25	%
$\lambda$	0 – 50	%
$Q_l$	500 – 5200	$\text{m}^3/\text{d}$

A geometria do SKID BCSS é ilustrada na Figura 3.2 cujas dimensões aproximadas foram fornecidas pela Petrobras e são indicadas na Tabela 3.2. O dispositivo é inclinado em  $5^\circ$  em relação à horizontal.



**Figura 3.2** – Geometria da cápsula do SKID BCSS

O SKID BCSS ilustrado na Figura 3.2 pode ser dividido nas seguintes seções:

- **Duto circular:** seção da cápsula do SKID BCS onde não há um duto interno;
- **Duto Anular:** seção de duto anular à montante do *intake*;
- **Separador Gás-Líquido:** seção do duto anular exatamente à frente do *intake*.
- **Topo não drenado:** zona morta no topo da cápsula, onde o gás se acumula.

Deve-se ressaltar que há uma série de transições de diâmetro, flanges e centralizadores no interior da cápsula, as dimensões apresentadas na Tabela 3.2 são médias e não representam tais detalhes com o objetivo de simplificar a construção da bancada que terá diâmetros únicos nos dutos externos e internos por simplicidade. Além do mais, estas transições e obstáculos eliminam qualquer possibilidade de o escoamento ser desenvolvido no interior da cápsula, portanto esta não será uma preocupação para a confecção do aparato experimental.

A separação gás-líquido no *intake* é fortemente influenciada pelo escoamento a montante, desta forma, é mandatório reproduzir o escoamento no duto anular, porém, questiona-se a necessidade de reprodução de todo o duto anular, pois como fora discutido anteriormente, há perturbações no escoamento, que tornam sem sentido qualquer discussão quanto ao desenvolvimento deste. Portanto, bastaria cobrir o último trecho de duto anular sem variações de diâmetro ou obstáculos ao escoamento, indicado como Duto anular 2 na Tabela 3.2. Desta forma, o comprimento total do dispositivo real a ser honrado cai de aproximadamente 21 m para 11 m, permitindo razões de escala maiores para a construção do protótipo para os ensaios experimentais.

**Tabela 3.2** – Dimensões aproximadas do SKID BCSS (fonte: Petrobras)

Descrição	Variável	[m]
Comprimento total	$L_T$	21,059
Duto de seção circular	$L_D$	1,659
Duto anular 1	$L_{AN1}$	8,400
Duto anular 2	$L_{AN2}$	4,000
Topo não drenado	$L_{Top}$	7,000
Diâmetro Interno	$D_i$	0,203
Diâmetro Externo	$D_e$	0,296

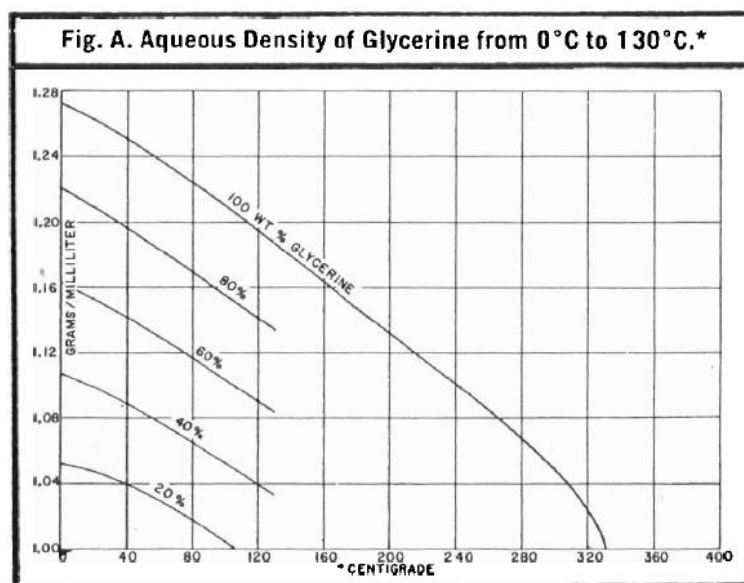
Definidos os dados operacionais, além da metodologia para o cálculo do fator de escala e da matriz de testes nos resta definir as propriedades dos fluidos de teste. As instalações do LabPetro podem manusear soluções em diversas concentrações de água e glicerina, sendo o ar o gás utilizado, portanto o projeto consiste em um problema de otimização, onde deve-se projetar quais propriedades dos fluidos de trabalho do modelo levariam à um fator de escala tal que o modelo coubesse fisicamente no LabPetro, considerando que o modelo deve ter no máximo 4 m que leva a um fator de escala ou razão de aspecto de 2.72. Com o problema devidamente posto, a partir de uma análise de sensibilidade, definiu-se que este fluido deve possuir as seguintes propriedades:

**Tabela 3.3** – Propriedades da solução aquosa com 32% wt de glicerina (SEGUR, 1953)

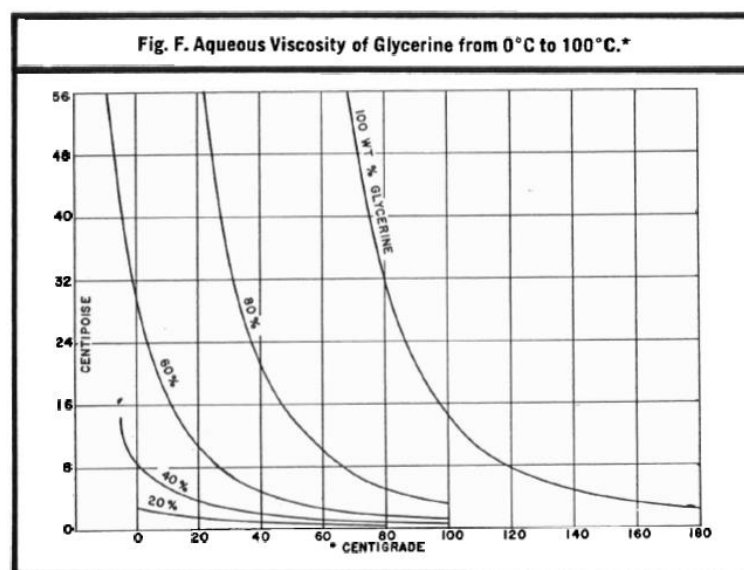
Variável	Valor	Unidade
$\rho_1$	1075.7	$kg/m^3$
$\mu_1$	2.3	cP
$\sigma_{21}$	0.07	N/m

Estas propriedades estão entre as da água e da glicerina (mais próximas às da água), o que sugere que uma solução dos dois fluidos possa cumprir tais requisitos, lembrando que são miscíveis. Como glicerina é utilizada como fluido aditivo anti-congelante, estimar tais propriedades não é complicado, pois há vasta documentação sobre as propriedades destas soluções. Considerando temperatura ambiente (25°C) e uma pressão absoluta de operação de 2 bar, uma solução aquosa com 32% wt de glicerina terá as propriedades demandadas (SEGUR, 1953).

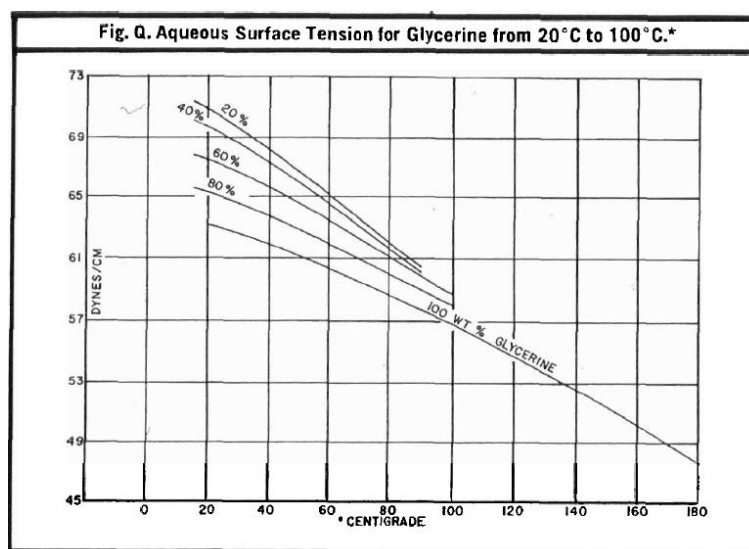




**Figura 3.3** – Densidade de soluções aquosas de glicerina (SEGUR, 1953)



**Figura 3.4** – Viscosidade de soluções aquosas de glicerina (SEGUR, 1953)



**Figura 3.5** – Tensão superficial de soluções aquosas de glicerina (SEGUR, 1953)

Desta forma, a partir da Equação (3.10), obtém-se as seguintes dimensões para a bancada:

**Tabela 3.4** – Dimensões da bancada projetada

Descrição	Variável	[m]
Cápsula	$L_T$	4,002
Duto anular	$L_{AN2}$	1,432
Topo não drenado	$L_{Top}$	2,570
Diâmetro Interno	$D_i$	0,075
Diâmetro Externo	$D_e$	0,109

A bancada seria formada por 2 tubos concêntricos com 4 m de comprimento com os diâmetros de 75 e 109 mm (diâmetro hidráulico de 34 mm e razão de aspecto de 1,46). O tubo externo seria de acrílico para possibilitar a visualização do escoamento e o interno de PVC.

A partir do fator de escala definido, a matriz de testes foi calculada através das Equações (3.32) e (3.33) utilizando os dados expressos na Tabela 3.1:

**Tabela 3.5** – Matriz de testes preliminar com 30 pontos experimentais

Real	Modelo	$\lambda$ [%]				
$Q_1[m^3/d]$	$j_1[m/s]$	10	20	30	40	50
500	0.10	1	2	3	4	5
1000	0.19	6	7	8	9	10
2140	0.41	11	12	13	14	15
2793	0.54	16	17	18	19	20
3500	0.67	21	22	23	24	25
5200	1.00	26	27	28	29	30

**Tabela 3.6** – Número de Reynolds da mistura para a matriz de testes

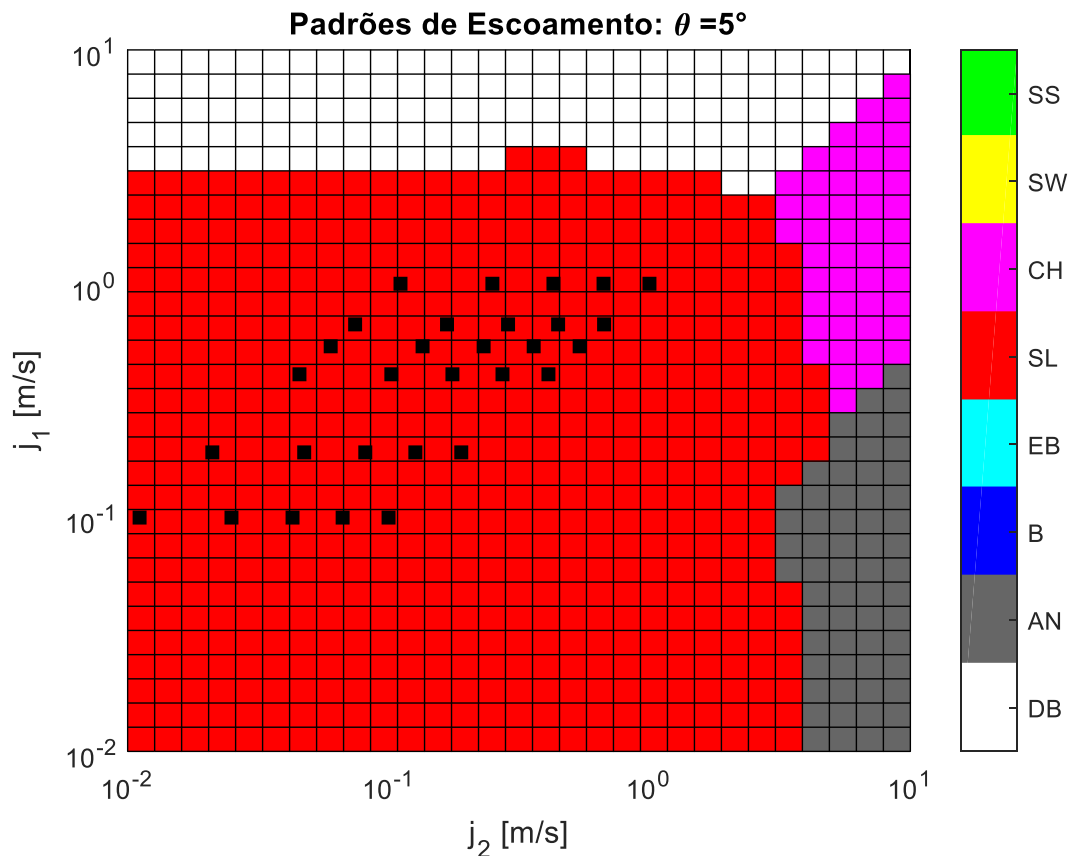
Real	Modelo	$\lambda$ [%]				
$Q_1[m^3/d]$	$j_1[m/s]$	10	20	30	40	50
500	0.10	1650.9	1855.9	2118.8	2468.7	2956.9
1000	0.19	3301.9	3711.7	4237.7	4937.4	5913.8
2140	0.41	7066.0	7943.0	9068.6	10566.0	12655.5
2793	0.54	9222.1	10366.8	11835.9	13790.1	16517.2
3500	0.67	11556.6	12991.0	14831.9	17280.8	20698.3
5200	1.00	17169.7	19300.8	22036.0	25674.3	30751.7

**Tabela 3.7** – Número de Froude da mistura para a matriz de testes

Real	Modelo	$\lambda$ [%]				
$Q_1[m^3/d]$	$j_1[m/s]$	10	20	30	40	50
500	0.10	0.18	0.21	0.24	0.28	0.33
1000	0.19	0.37	0.42	0.47	0.55	0.66
2140	0.41	0.79	0.89	1.02	1.19	1.42
2793	0.54	1.03	1.16	1.33	1.55	1.86
3500	0.67	1.29	1.45	1.66	1.94	2.33
5200	1.00	1.92	2.16	2.47	2.88	3.46

Os números de Reynolds e Froude da mistura calculados para a matriz de testes da Tabela 3.5 cujos resultados foram expressos na Tabela 3.6 e Tabela 3.7 respectivamente indicam que a matriz é abrangente cobrindo escoamentos de laminares a turbulentos e de

subcríticos a supercríticos. Os pontos da matriz de testes expressa na Tabela 3.5 foram plotados no mapa de padrões de escoamento obtido para a bancada experimental a partir do modelo de Barnea et al. (1987) adicionadas as modificações propostas por Caetano et al. (1992) expresso na Figura 3.6 (BARNEA, 1987; CAETANO; SHOHAM; BRILL, 1992b, 1992a).



**Figura 3.6**– Mapa de padrões de escoamento e a matriz de testes (quadrados pretos).

onde as siglas SS, SW, CH, SL, EB, B, AN e DB representam respectivamente os padrões de escoamento estratificado, estratificado ondulado, churn, golfada, bolhas alongadas, bolhas, anular e bolhas dispersas. A Figura 3.6 indica que o padrão de escoamento esperado para todos os pontos experimentais será o golfada.

Infelizmente, devido à falta de tempo e recursos financeiros, os testes experimentais não foram conduzidos com uma solução aquosa com 32% wt de glicerina como projetado, portanto não restou outra alternativa a não ser o uso da água e ar para tais ensaios, deixados como sugestão para trabalhos futuros a repetição destes experimentos com o fluido projetado.

### 3.2 Bancada Experimental

Com as dimensões projetadas a partir da análise dimensional, resta avaliar se há dutos disponíveis no mercado com as dimensões demandadas. Deve-se escolher diâmetros próximos dos obtidos, mas prioritariamente os que levem a diâmetros hidráulicos e razões de aspectos semelhantes para o duto anular. O duto interno possui diâmetro nominal em PVC marrom, porém, há limitações para o duto externo em acrílico, como exibido na Figura 3.7:

Diâmetro externo (mm)	Parede (mm)	Comprimento (mm)	Processo de Fabricação	Diâmetro externo (mm)	Parede (mm)	Comprimento (mm)	Processo de Fabricação
50	2,0	2000 e 1000	Extrusão	50	3,0	2000 e 1000	Cast
50	3,0	2000 e 1000	Extrusão	50	3,0	2500 e 1250	Cast
50 NOVOI	4,0	2000 e 1000	Extrusão	60	3,0	2000 e 1000	Cast
50 NOVOI	5,0	2000 e 1000	Extrusão	60	3,0	2500 e 1250	Cast
60 NOVOI	2,0	2000 e 1000	Extrusão	70	3,0	2000 e 1000	Cast
60	3,0	2000 e 1000	Extrusão	80	3,0	2000 e 1000	Cast
60 NOVOI	4,0	2000 e 1000	Extrusão	82	3,0	2500 e 1250	Cast
60 NOVOI	5,0	2000 e 1000	Extrusão	90	3,0	2000 e 1000	Cast
70	3,0	2000 e 1000	Extrusão	100	3,0	2000 e 1000	Cast
70 NOVOI	5,0	2000 e 1000	Extrusão	100	3,0	2500 e 1250	Cast
80	3,0	2000 e 1000	Extrusão	100	5,0	2000 e 1000	Cast
80 NOVOI	5,0	2000 e 1000	Extrusão	110	3,0	2000 e 1000	Cast
90	3,0	2000 e 1000	Extrusão	110	5,0	2000 e 1000	Cast
90 NOVOI	5,0	2000 e 1000	Extrusão	120	3,0	2000 e 1000	Cast
100	3,0	2000 e 1000	Extrusão	120	3,0	2500 e 1250	Cast
100 NOVOI	4,0	2000 e 1000	Extrusão	120	5,0	2000 e 1000	Cast
100 NOVOI	5,0	2000 e 1000	Extrusão	134	3,0	2000 e 1000	Cast
110 NOVOI	3,0	2000 e 1000	Extrusão	134	5,0	2000 e 1000	Cast
110 NOVOI	5,0	2000 e 1000	Extrusão	150	3,0	2000 e 1000	Cast
120 NOVOI	3,0	2000 e 1000	Extrusão	150	5,0	2000 e 1000	Cast
120 NOVOI	5,0	2000 e 1000	Extrusão				
133 NOVOI	3,0	2000 e 1000	Extrusão				
133 NOVOI	5,0	2000 e 1000	Extrusão				
150 NOVOI	3,0	2000 e 1000	Extrusão				
150 NOVOI	4,0	2000 e 1000	Extrusão				
150 NOVOI	5,0	2000 e 1000	Extrusão				

**Figura 3.7** – Dutos de acrílico (CENTRAL DO ACRILICO, 2018).

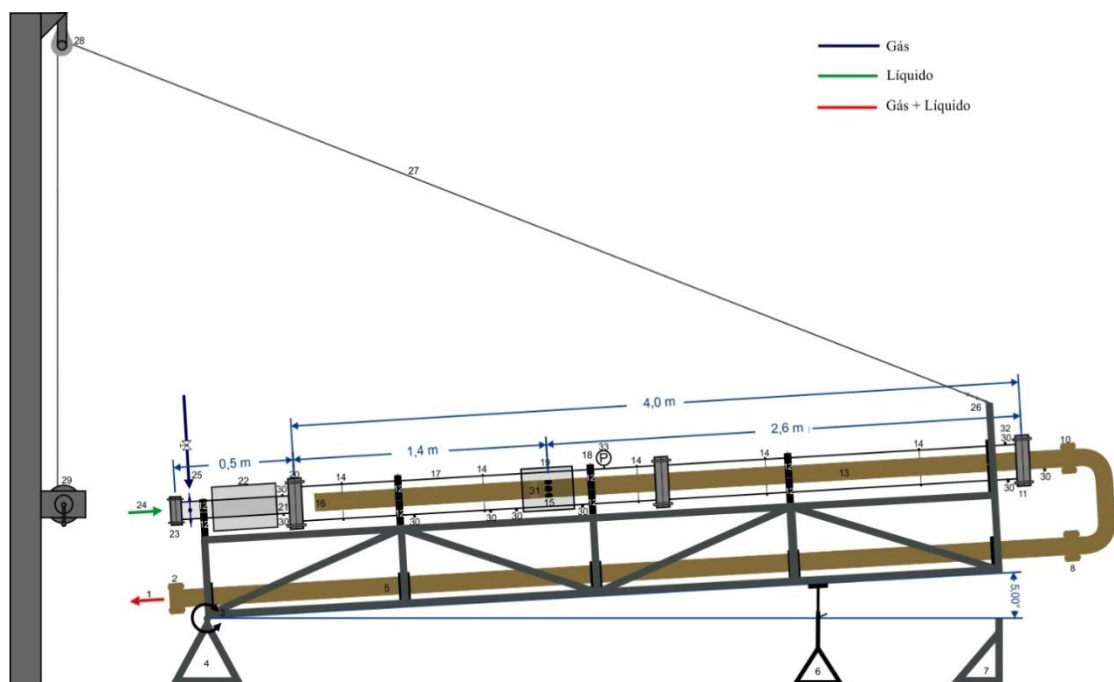
O duto de acrílico com o diâmetro interno mais próximo do demandado (110 mm com 2 m de comprimento) foi marcado na área destacada em laranja na Figura 3.7 levando às dimensões finais da bancada construída como dita a Tabela 3.8.

**Tabela 3.8** – Dimensões da bancada construída comparadas com a projetada

Variável	Projeto [m]	Construído [m]	Desvio [%]
$L_T$	4,002	4,0	0,2
$L_{AN2}$	1,432	1,4	2,4
$L_{Top}$	2,570	2,6	1,0
$D_i$	0,075	0,075	0,5
$D_e$	0,109	0,110	1,1
$D_H$	0,0342	0,035	2,4
$r_a$	1,46	1,47	0,6

As dimensões estão próximas às projetadas, portanto não haverá grandes prejuízos à montagem experimental e apesar das limitações quanto ao desenvolvimento do escoamento supracitadas, ao fim, o duto anular possui um comprimento total igual a 40 diâmetros hidráulicos equivalentes.

Para abrigar as tubulações, foi idealizada uma estrutura treliçada inclinável visando estudar o comportamento do escoamento interno em função do ângulo de inclinação, como representado na Figura 3.8. Portanto, o dispositivo prevê um sistema de roldanas e catraca para a inclinação da bancada via içamento através de um cabo de aço com inclinação variando de 0 (horizontal) a 30°, apesar deste trabalho se limitar a inclinação de 5° especificamente. As descrições dos itens da bancada são apresentadas na Tabela 3.9.

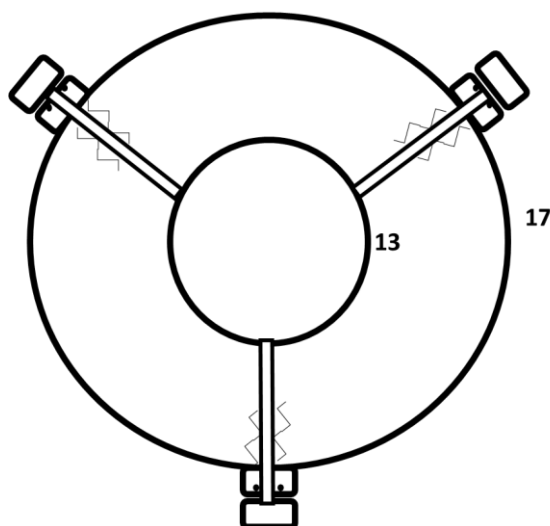


**Figura 3.8** – Representação da bancada

**Tabela 3.9** - Descrição dos itens da bancada

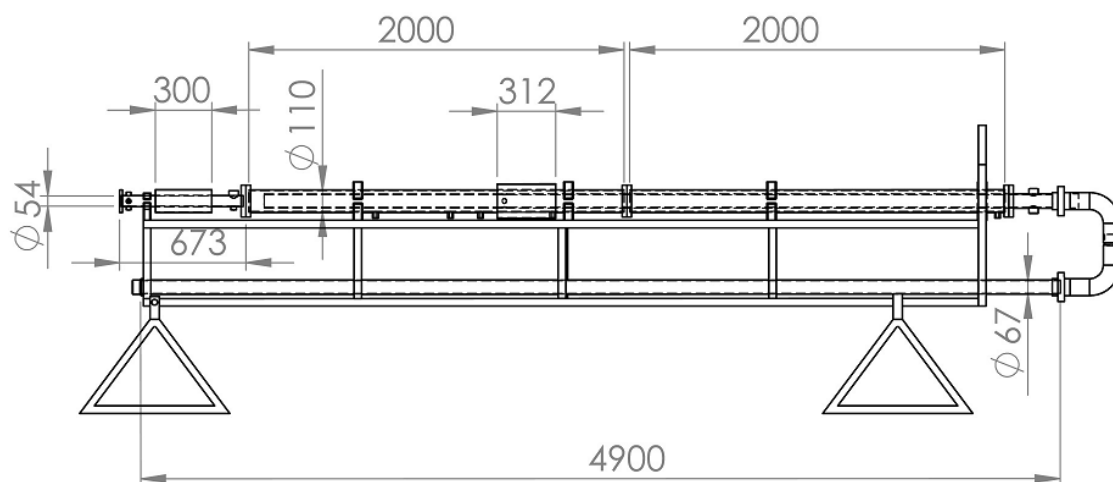
<b>Item</b>	<b>Descrição</b>
<b>1</b>	Saída de Fluidos – água/glicerina e Ar em várias proporções
<b>2</b>	Flange adaptador do mangote flexível para tubo PVC 75 mm OD
<b>3</b>	Estrutura treliçada em metalon
<b>4</b>	Base pivô com eixo de rotação para a inclinação da estrutura 3 (0 a 30°)
<b>5</b>	Tubo PVC 75 mm OD
<b>6</b>	Calço para apoio da estrutura 3 quando inclinada
<b>7</b>	Apoio para a estrutura 3 quando esta estiver a 0° (horizontal)
<b>8</b>	Flange tubo PVC 75 mm OD (união 75mm)
<b>9</b>	Tubo PVC 75 mm OD (curvas, conexões e uniões omitidas)
<b>10</b>	Flange tubo PVC 75 mm OD (união 75mm)
<b>11</b>	Flange tubo PVC 75 mm OD x tubo acrílico 120 mm OD
<b>12</b>	Suporte de apoio para o tubo de acrílico externo do trecho anular - cambota
<b>13</b>	Tubo PVC 75 mm OD
<b>14</b>	Centralizadores para o tubo interno de PVC 75 mm OD
<b>15</b>	Intake - 6 furos equiespaçados de 23,3 mm de diâmetro
<b>16</b>	Tampão para o tubo interno 75 mm OD PVC
<b>17</b>	Tubo de acrílico 120 mm OD (5 mm de espessura)
<b>18</b>	Flange tubo acrílico 120 mm OD x tubo acrílico 120 mm OD
<b>19</b>	Aquário de acrílico para filmagem
<b>20</b>	Flange tubo acrílico 120 mm OD x tubo PVC 75 mm OD
<b>21</b>	Tubo acrílico 75 mm OD
<b>22</b>	Aquário de acrílico para observação dos padrões de escoamento de entrada
<b>23</b>	Flange adaptador do mangote flexível para tubo acrílico 75 mm OD
<b>24</b>	Entrada de Fluidos - água/glicerina em várias proporções
<b>25</b>	Anel de injeção de ar na bancada em várias proporções
<b>26</b>	Olhal de içamento
<b>27</b>	Cabo de aço
<b>28</b>	Roldana de suporte
<b>29</b>	Catraca manual para a inclinação da bancada
<b>30</b>	Portas para pontos de tomada de pressão e temperatura (1/4" NPT)
<b>31</b>	Tampão - placa com furos para inibir escoamentos secundários
<b>32</b>	PSV - PSHH em 3 bar (1,5 x a pressão de operação prevista em 2 bar)
<b>33</b>	Manômetro – indicação local da pressão de operação

Deve-se ressaltar que o tubo interno do duto anular é centralizado e a estrutura permite a substituição deste tubo interno por outros diâmetros, além da operação de substituição ser simples e demandar alterações mínimas na bancada. Segue descrição do dispositivo de centralização idealizado para tal tarefa na Figura 3.9.



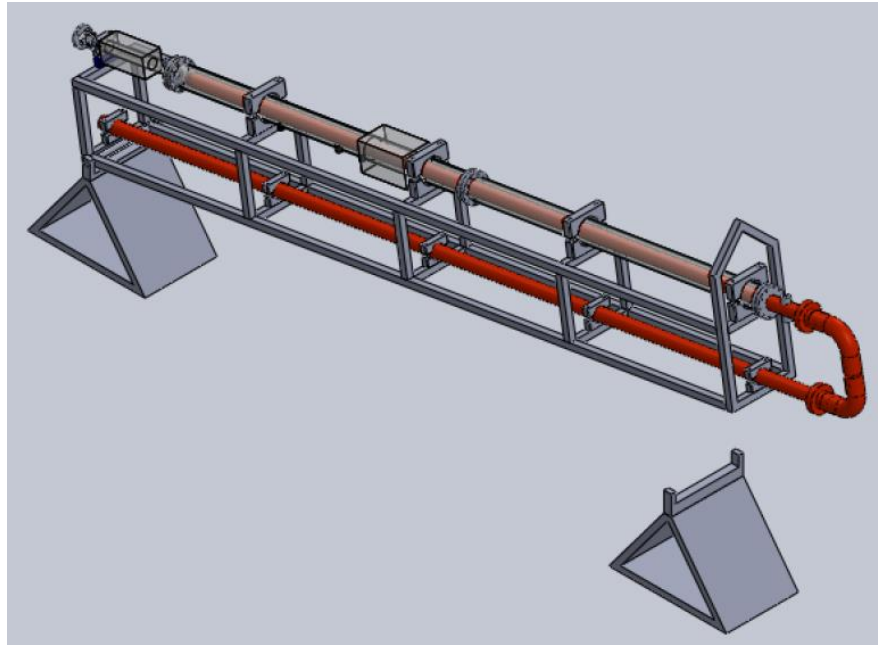
**Figura 3.9** – Centralizadores do tubo interno, elemento 14 na Figura 3.8 e Tabela 3.9

O desenho mecânico geral da bancada construída é apresentado na Figura 3.10 com as cotas em mm que pode ser visualizado em 3D na Figura 3.11, enquanto que a Figura 3.12 representa em detalhe a estrutura da cápsula além das posições dos pontos de tomada de pressão e temperatura. Por fim, na Figura 3.13, apresenta-se a bancada construída.

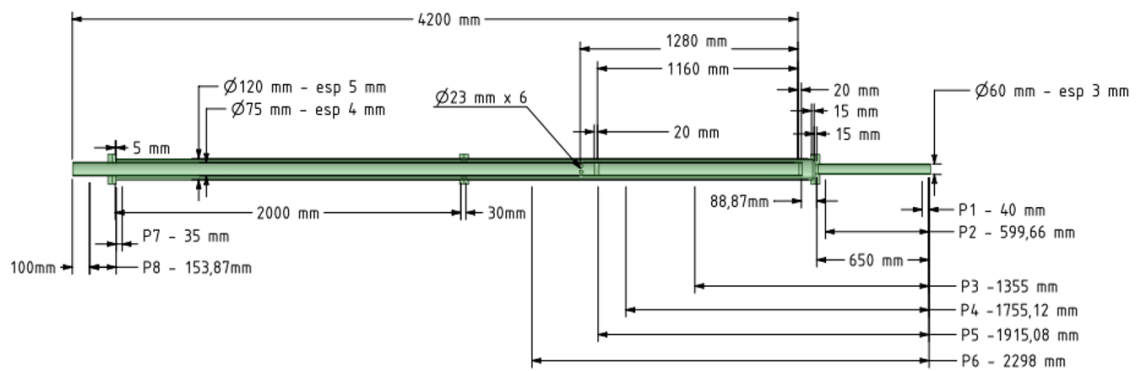


**Figura 3.10** – Desenho mecânico da bancada com cotas.





**Figura 3.11** – Desenho mecânico 3D da Bancada.



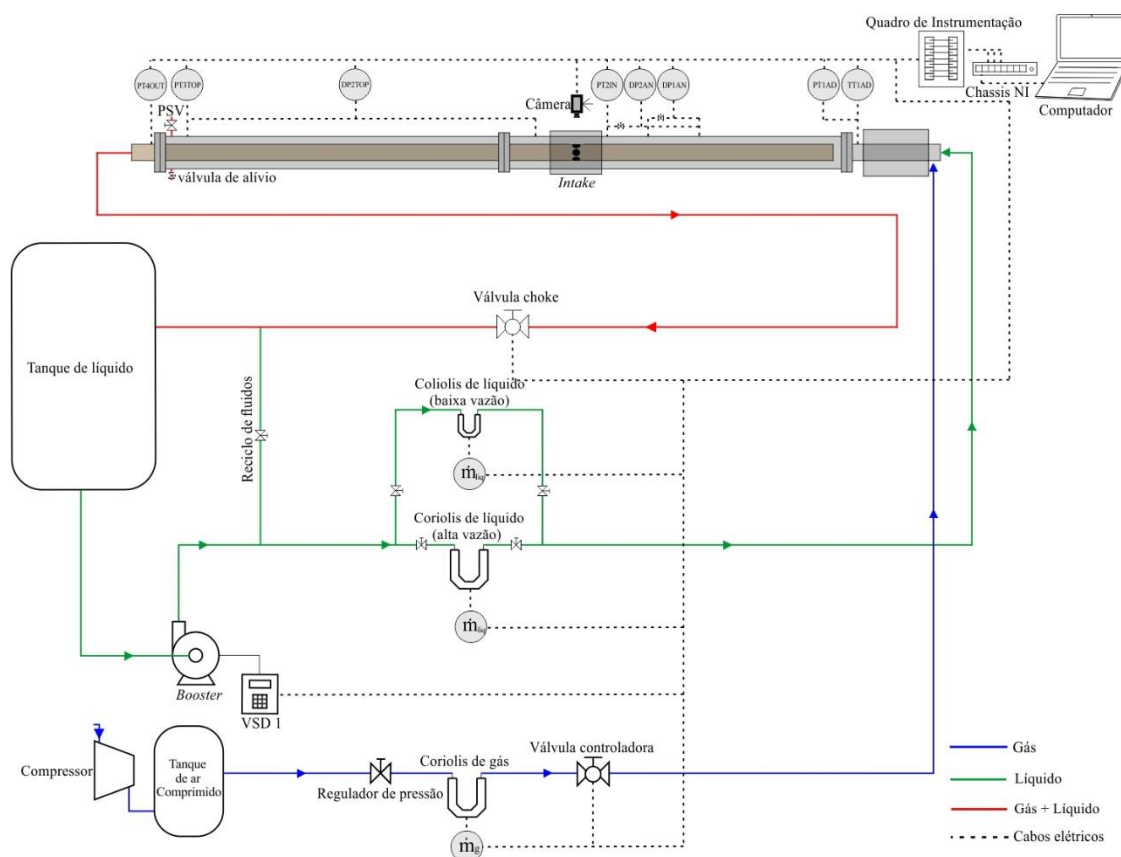
**Figura 3.12** – Desenho da cápsula em detalhe.



**Figura 3.13** – Bancada experimental construída.

### 3.2.1 Sistema de Suprimento de Fluidos

O aparato experimental desenvolvido trata-se de um circuito fechado para a circulação de líquido e injeção de gás à montante da bancada, constitui-se de tanque de líquido, tubulações, bomba *booster*, variadores de frequência, linhas de líquido, de gás, e multifásica, válvulas, medidores de vazão, instrumentação na bancada de testes e sistemas de aquisição de dados como representado na Figura 3.14.



**Figura 3.14** – Layout do aparato experimental.

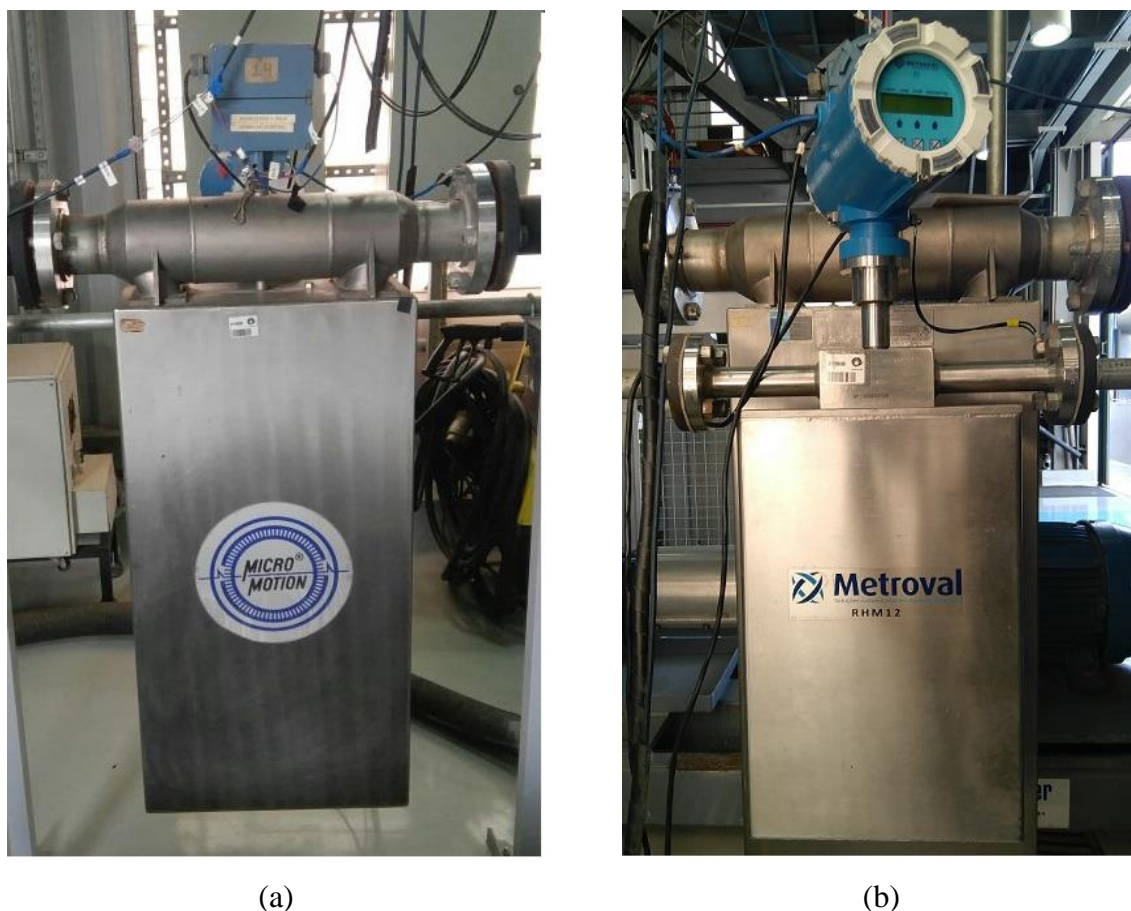
Ilustrada em verde na Figura 3.14, encontra-se a linha de líquidos que é composta de uma bomba *booster* que desloca o líquido advindo de um tanque vertical de polipropileno de 2 m<sup>3</sup> (Figura 3.15.a) para a bancada de testes. A bomba *booster* pode ser uma bomba centrífuga WEG® caso o fluido de trabalho seja água (Figura 3.15.b) ou uma bomba de cavidades progressivas NETZSCH® caso o fluido de trabalho seja glicerina (Figura 3.15.c). As bombas *booster* tem a função de fornecer líquidos na vazão desejada para o arranjo experimental além de auxiliar no controle da pressão experimental através do controle da rotação de acionamento, realizado remotamente através dos variadores de frequência ilustrados na Figura 3.14 como VSD-1, os variadores são fornecidos pela fabricante WEG® nos modelos CFW 11 para a bomba *booster* de glicerina e CFW 09 para a bomba *booster* de água (Figura 3.15.d). A fim de aumentar a segurança e garantir a integridade, na descarga das bombas *boosters* há um reciclo de fluidos, onde há uma válvula globo de atuação manual aberta em meia volta para os testes realizados neste trabalho (Figura 3.15.e).



**Figura 3.15** – Equipamentos da linha de líquidos. (a) Tanque de Líquido, (b) Booster WEG®, (c) Booster NETZSCH®, (d) Variadores de frequência CFW 11 e CFW 09 (e) Reciclo de líquido.

À montante da bancada de testes, há medidores de vazão mássica de líquido do tipo Coriolis, sendo um de alta vazão (Figura 3.16.a) fornecido pela Emerson e um de baixa vazão (Figura 3.16.b) fornecido pela Metroval. A comutação das linhas para a escolha do medidor de vazão em operação ocorre através de um *manifold* manual de acordo com a necessidade da matriz de testes (Tabela 3.13). Os modelos e as especificações dos medidores estão descritos na Tabela 3.12.





**Figura 3.16** – Medidores de vazão mássica de líquido: (a) alta vazão – Emerson, (b) baixa vazão – Metroval.

Ilustrada em azul na Figura 3.14, encontra-se a linha de ar que é composta de um compressor (Figura 3.17.a) fabricado pela Ingersoll Rand, cuja descarga é alinhada para vasos absorvedores de pulsação (Figura 3.17.b). À montante do aparato experimental, há um regulador de pressão de atuação manual cujo *setpoint* foi ajustado para 8 bar neste trabalho (Figura 3.17.c), com a finalidade de garantir que a pressão na tubulação de gás não exceda o limite estabelecido e auxiliar a válvula controladora de vazão de gás no ajuste dos pontos da matriz de teste, principalmente os pontos de vazões e frações de vazio mais baixas. À jusante do regulador, encontra-se um medidor de vazão mássica de gás do tipo Coriolis (Figura 3.17.d), fabricado pela Emerson modelo Micro Motion 2200S, e na sequência, uma válvula controladora de vazão de gás do tipo agulha (Figura 3.17.e) fornecido pela HORA Regelarmaturen e modelo MC 160/230, cuja atuação é remota, onde então, o ar é injetado na admissão da bancada através de um anel com quatro bicos injetores (Figura 3.17.f) afim de se obter a mistura mais homogênea possível na entrada da seção de testes.



(a)



(b)



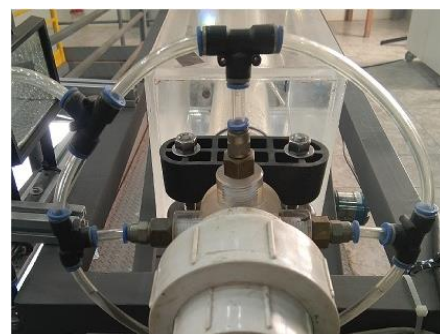
(c)



(e)



(d)



(f)

**Figura 3.17** – Equipamentos que compõem a linha de ar: (a) Compressor de ar - Ingersoll Rand, (b) Vasos de ar comprimido - Ingersoll Rand, (c) Regulador de pressão - Micro, (d) Medidor de vazão mássica - Micro Motion, (e) Válvula controladora de ar - HORA Regelarmaturen e (f) ) Anel de injeção de ar

Ilustrada em vermelho na Figura 3.14, encontra-se a linha de descarga onde está instalada uma válvula *choke* cuja função é o controle da pressão de operação do experimento através da restrição do escoamento. Trata-se de uma válvula globo eletropneumática atuada remotamente fornecida pela Fisher modelo 3582i (Figura 3.18).



**Figura 3.18** – Válvula *choke* Fisher.

Na Tabela 3.10 apresenta-se a lista dos principais equipamentos utilizados no sistema de testes.

**Tabela 3.10** – Equipamentos utilizados no aparato experimental.

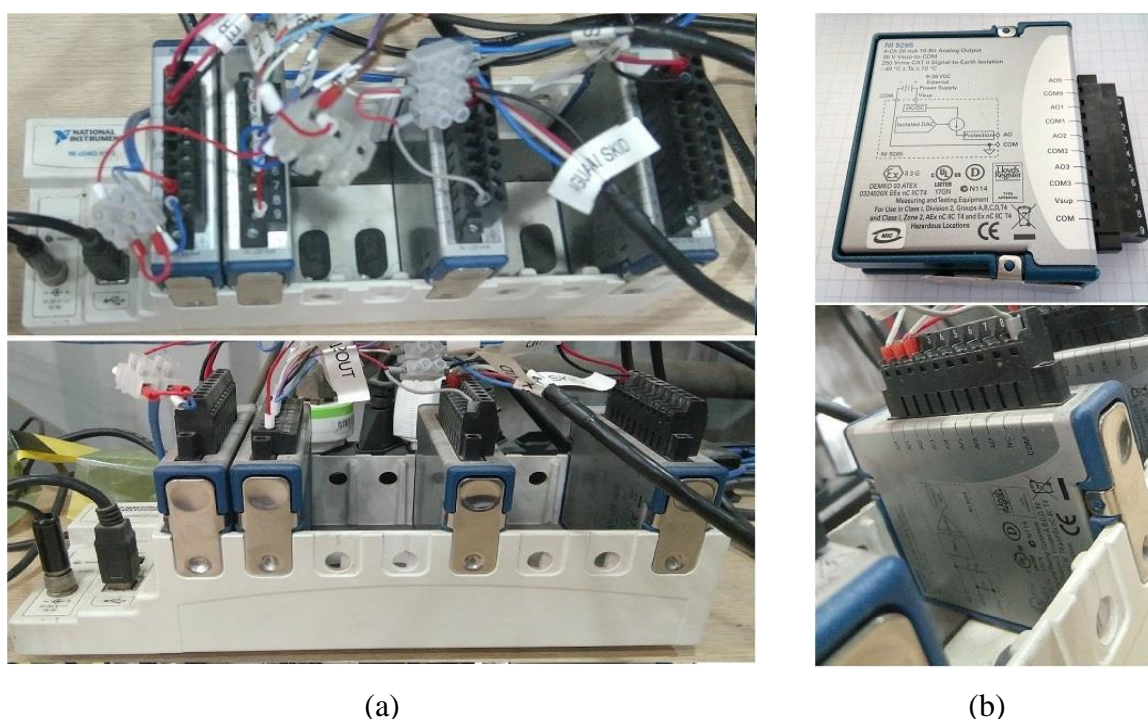
<b>Equipamento</b>	<b>Fabricante/Modelo</b>	<b>Características</b>
Bomba <i>booster</i> 1	WEG	Trifásico 220/380/440V, 72,1/41,7/36,1 A, 60 Hz, 22(30) kW (HP), 3530 rpm
Variador de frequência.	WEG CFW - 09	Trifásico, 380 - 480 V, 60 Hz, IHM com display digital e acionamento local
Válvula <i>choke</i> .	Fisher 3582i	Válvula de controle globo, posicionador com controle eletropneumático sinal de 4-20 mA
Compressor de ar	Ingersoll Rand SSR HP 50 SE	Compressor da linha de ar, 50 HP, com capacidade de 365,4 m <sup>3</sup> /h
Válvula controladora de gás.	HORA Regelarmaturen MC 160/230	Controlador remoto de fluxo de gás. 50 Hz, 230 V, 4-20 mA
Regulador de pressão da linha de gás.	MICRO	Regulador/atuador de pressão da linha de gás regulada manualmente
Válvula PSV	Fairchild	Válvula pneumática instalada no topo do duto anular da bancada com setpoint em 3 bar
Válvula globo	Mipel	Válvula globo instalada no reciclo de segurança acionada manualmente

### 3.2.2 Instrumentação e Aquisição de Dados

A aquisição de dados e controle dos equipamentos que constituem o arranjo experimental foram implementados através do *software* LabVIEW® da National Instruments®

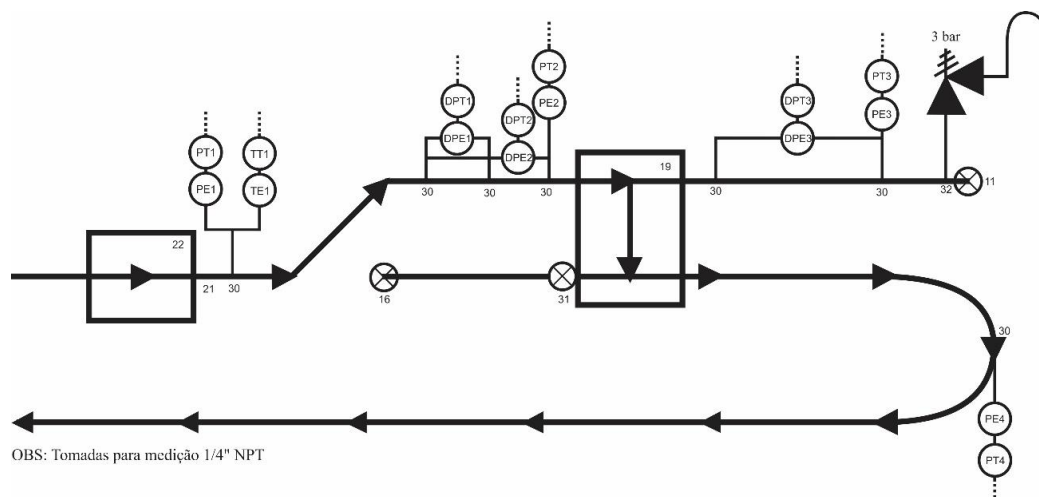


cuja interface de entrada e saída de dados foi um chassi do modelo NI 9172 também fabricado pela National Instruments® (Figura 3.19.a), conectado através de uma porta USB a um microcomputador. Os instrumentos e equipamentos são conectados ao chassi através de módulos de aquisição e/ou geração de sinais (Figura 3.19.b) que possuem funções específicas de entrada ou saída de dados para cada especificação de sinal, usou-se módulos de aquisição de sinais analógicos para os instrumentos (+10/-10V ou 4 – 20 mA) e de geração de sinais *hardwired* (4 – 20 mA) para a operação remota dos variadores de frequência das bombas booster, da válvula *choke* e da válvula de controle de vazão de ar.

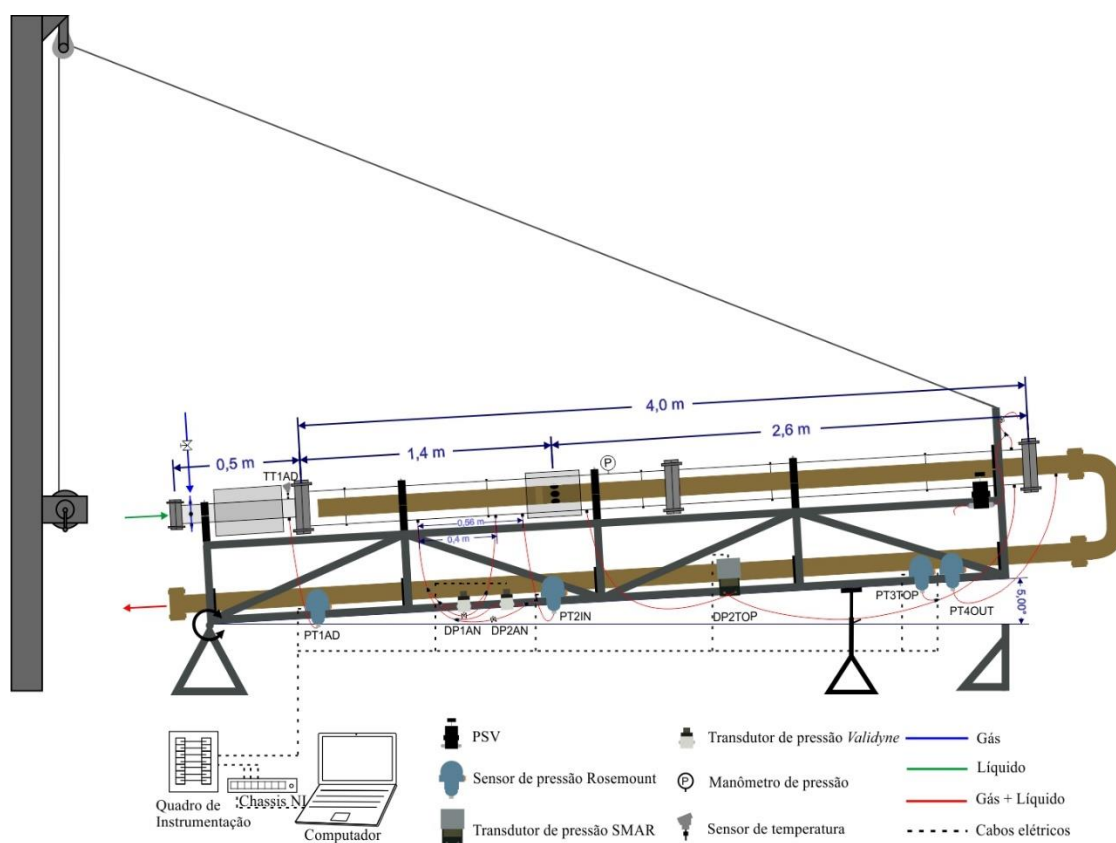


**Figura 3.19** – Equipamentos de aquisição de sinais: (a) Chassi NI 9272, (b) Módulos de aquisição de sinais.

O aparato experimental foi instrumentado com sensores de pressão e temperatura, além de possuir duas janelas de visualização feitas em acrílico que permitem a filmagem do escoamento com câmeras de alta velocidade e uma válvula de segurança (PSV com *setpoint* em 3 bar – 50% superior à pressão máxima de operação que é de 2 bar), como descrito no diagrama de tubulação e instrumentação (P&ID) da bancada expresso na Figura 3.20 e na Figura 3.21, que ilustra a disposição dos instrumentos na bancada.



**Figura 3.20** – P&ID da bancada.



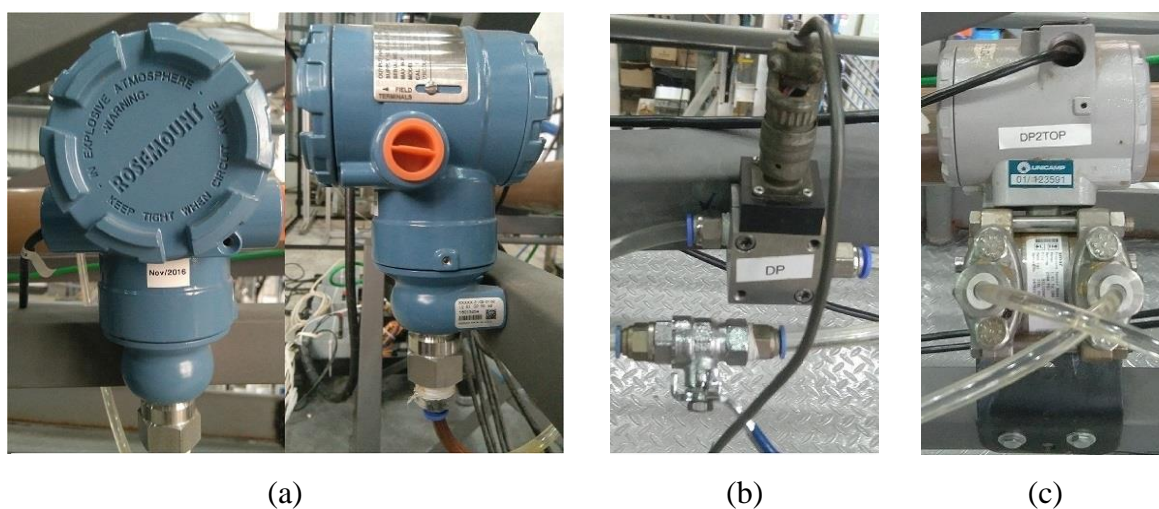
**Figura 3.21** – Desenho da bancada instrumentada.

Os instrumentos utilizados para a medição da pressão manométrica são os sensores Rosemount® 2088A fabricados pela Emerson (Figura 3.22.a), esses sensores foram dispostos na bancada como ilustrado na Figura 3.21 e detalhado na Tabela 3.11: na admissão (PT1AD), à montante próximo ao *intake* (PT2IN), no topo do duto anular (PT3TOP) e na descarga da bancada (PT4OUT). Para a medição da pressão diferencial, foram utilizados dois tipos de

transdutores em três locais distintos: um transdutor fabricado pela SMAR® modelo LD-301 (Figura 3.22.c) no topo do duto anular (DP2TOP) com a finalidade de estudar a evolução da interface gás-líquido na medida que o gás se acumula no topo, além de dois transdutores Validyne® modelo DP-15 (Figura 3.22.b), ambos instalados no duto anular à montante do *intake* (DP1AN e DP2AN) com uma distância entre as tomadas de pressão de 400 mm e 560 mm respectivamente, ambos os transdutores Validyne tem como finalidade o estudo da assinatura de pressão diferencial e dos padrões de escoamento do duto anular. Os diafragmas utilizados pelos transdutores variam de acordo com a inclinação da bancada, para a inclinação de 5° que é o objeto de estudo deste trabalho, o diafragma utilizado foi o de número #30 com fundo de escala de 8,6 KPa.

**Tabela 3.11** – Sensores de pressão e localização das tomadas em relação a Figura 3.12

Variável	Tipo	Tomada 1	Tomada 2
PT1AD	Manométrico	$P_2$	NA
PT2IN	Manométrico	$P_5$	NA
PT3TOP	Manométrico	$P_7$	NA
PT4OUT	Manométrico	$P_8$	NA
DP2TOP	Diferencial	$P_7$	$P_6$
DP1AN	Diferencial	$P_4$	$P_3$
DP2AN	Diferencial	$P_5$	$P_3$



**Figura 3.22** – Sensores de pressão. (a) Rosemount 2088 A, (b) Validyne DP15, (c) SMAR LD 301.

Para a aquisição de sinais dos transdutores de pressão diferencial Validyne, foram utilizados demoduladores Validyne CD 23 (Figura 3.23.a), o sinal de saída varia linearmente com a pressão de -10 a 10 V transmitido do demodulador à um dispositivo ES multifuncional da marca National Instruments® modelo NI USB 6000 (Figura 3.23.b), que é conectado ao microcomputador através de uma porta USB e lido pelo programa implementado no LabVIEW®.



(a)



(b)

**Figura 3.23** – Aquisição de sinais dos transdutores Validyne: (a) Demodulador Validyne CD-23, (b) NI USB 6000.

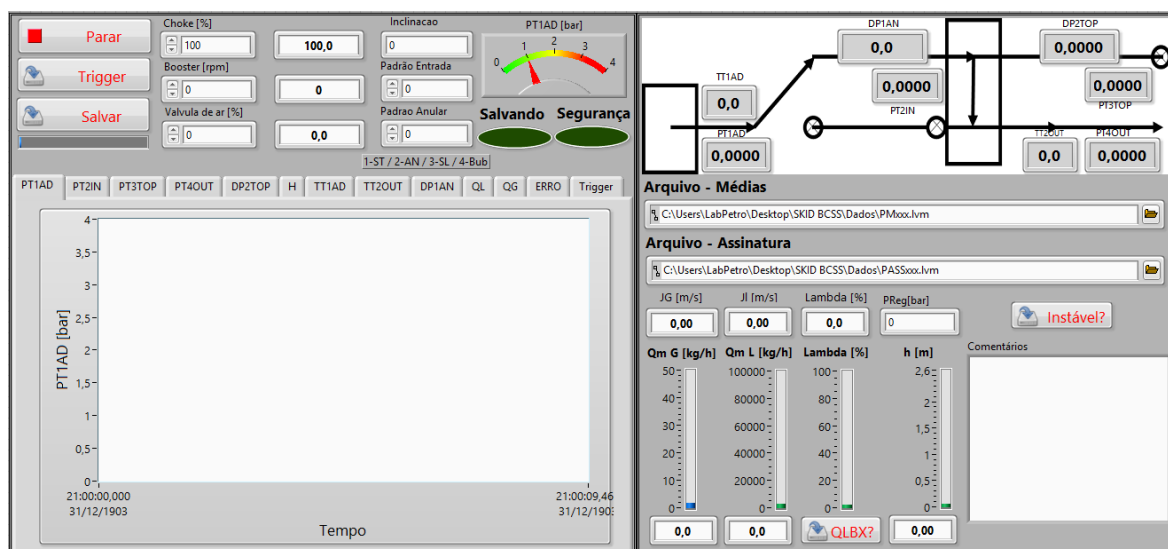
A temperatura de operação (TT1AD) é lida na tomada  $P_2$  ilustrada na Figura 3.12 que fica na admissão da bancada (Figura 3.21). O instrumento utilizado foi uma termoresistência do modelo PT-100 fornecido pela fabricante Edtec (Figura 3.24). O sensor opera baseado no princípio da variação da resistência elétrica de um metal em função da temperatura deste. Opera na faixa de operação 0 – 100 °C cujo transmissor gera um sinal de 4 - 20 mA que é lido pelo programa LabVIEW®.





**Figura 3.24** – Instrumento de temperatura (PT100).

O software de controle, visualização e aquisição de dados foi desenvolvido na plataforma LabVIEW® 2014 especificamente para os ensaios, este programa é interligado aos módulos de aquisição de dados e possui uma interface gráfica (Figura 3.25) destinada a visualização dos sinais adquiridos, operar os equipamentos remotos (variadores das *boosters*, válvula *choke* e válvula de ar) e armazenar os dados coletados em um arquivo digital de forma ordenada e eficiente. O usuário pode definir a taxa de amostragem (200 Hz) e a janela de aquisição desejadas (30 s de amostras gravadas).



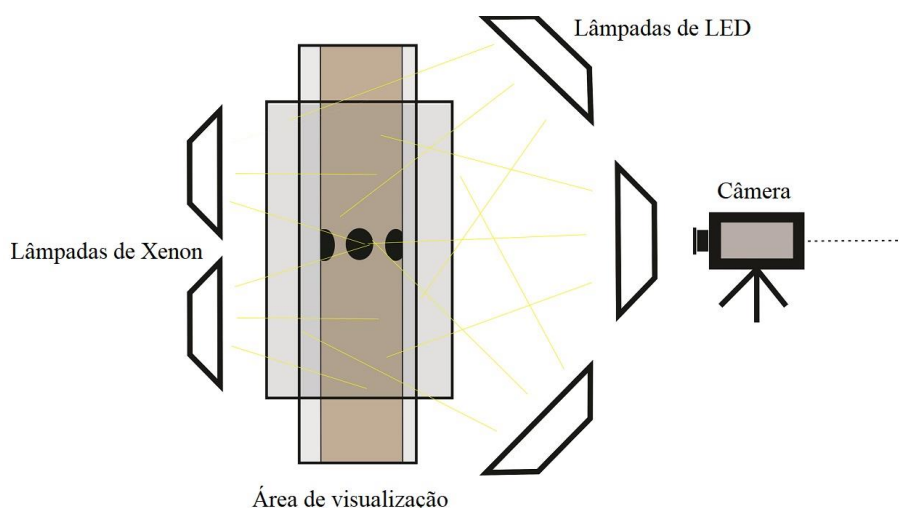
**Figura 3.25** – Interface gráfica do programa de aquisição de dados.

Os dados adquiridos são armazenados no formato de tabelas em arquivos de texto (extensão \*.lvm) que contém os valores médios das variáveis medidas além da assinatura temporal das pressões diferenciais medidas no duto anular.

### 3.2.3 Sistema de Visualização

Para visualizar o escoamento bifásico no duto anular e no *intake* empregou-se a técnica de filmagem com câmeras de alta velocidade. No *intake*, utilizou-se a câmera modelo Motion Pro X3, fabricada pela RedLake, que possui taxa de aquisição de 1000 fps na resolução máxima de 1280 x 1024, chegando a 64000 fps em resoluções inferiores. No duto anular entre as tomadas  $P_3$  e  $P_5$  dos Validynes ilustrada na Figura 3.12, utilizou-se a câmera modelo Phantom VEO 640 fabricada pela Phantom, que possui uma taxa de aquisição de 1400 fps na resolução máxima de 2560 x 1600, chegando 360000 fps em resoluções inferiores.

As câmeras foram posicionadas de frente para a bancada acopladas a tripés. Os equipamentos de iluminação utilizados foram duas lâmpadas de xenon posicionadas atrás da janela de visualização, enquanto que na seção frontal foram utilizadas três MultiLed LT da marca GSVITEC, que dispõe cada um de 24 LEDs de alta potência com um total 7700 lumens (Figura 3.26).



**Figura 3.26** – Esquema de iluminação.

Sincronizou-se os gatilhos das câmeras com a aquisição de dados feita através do programa no LabVIEW®, sendo assim, os dados foram adquiridos de forma simultânea às filmagens.

### 3.2.4 Aferição dos Instrumentos

Todos os instrumentos e equipamentos mencionados e suas principais características estão descritos na Tabela 3.12.

**Tabela 3.12** – Instrumentação utilizada no aparato experimental.

Instrumento	Modelo	Características	Precisão
Medidor de vazão mássica de líquidos. (Alto)	Emerson Micro Motion DS300H	Sinal de 4 – 20 mA, operação de 0 a 190680 kg/h, tipo Coriolis de 3”.	$\pm 0.15\%$ (Valor lido)
Medidor de vazão mássica de líquidos. (Baixo)	Metroval RHM 12	Sinal de 4 – 20 mA, operação de 120 a 6000 kg/h, tipo Coriolis ¾”.	$\pm 0,05\%$ (Valor lido)
Medidor de vazão mássica de gás	Emerson Micro Motion 2200S	Tipo Coriolis de 1/2”, sinal, saída analógico de 4 – 20 mA, faixa de operação 0 – 310 kg/h.	$\pm 0,35$ (valor lido)
Transdutor de pressão diferencial	Validyne DP-15	Elementos sensores e transmissores de pressão diferencial no duto anular à montante do intake	$\pm 0,25\%$ (fundo de escala).
Transdutor de pressão diferencial	SMAR LD-301	Sinal de 4-20 mA, transmissor de pressão diferencial instalado no topo do duto anular.	0,075% (Span).
Sensores de pressão absoluta	Emerson Rosemount 2088A	Sinal de 4-20 mA, 4 elementos sensores e transmissores de pressão absoluta distribuídos pela bancada.	0.075% (Span)
Sensor de temperatura	Edtec - PT-100	Sinal de 4-20 mA, termoresistência com faixa de operação 0-100 °C instalado na admissão da bancada.	$\pm 0,01\%$ (fundo de escala).

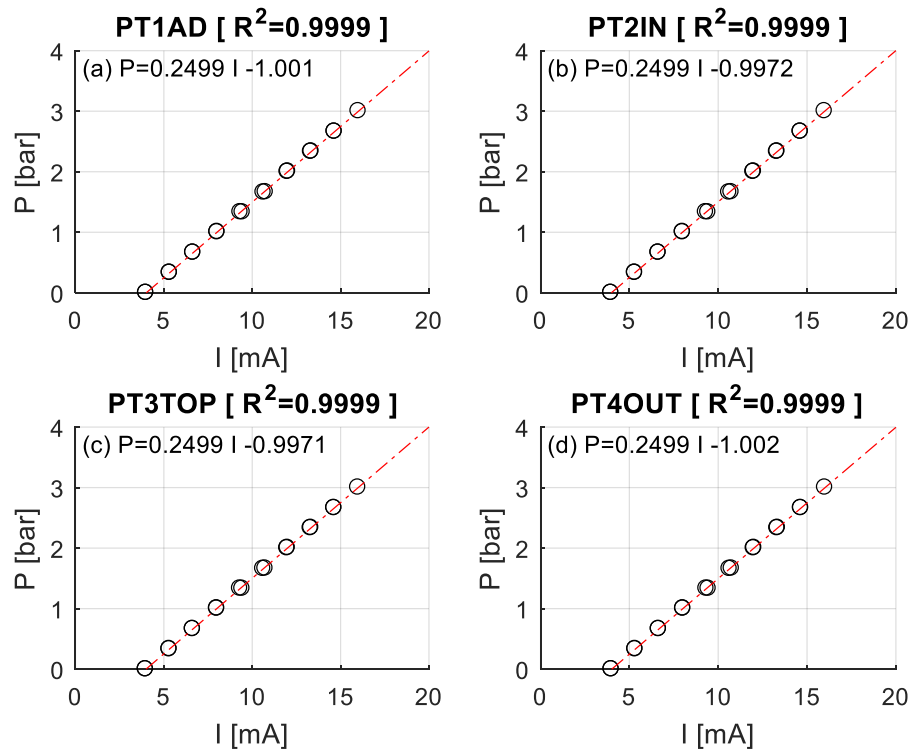
Todos os instrumentos foram calibrados em fábrica, porém deve-se aferi-los para garantir a qualidade dos dados adquiridos durante os experimentos realizados. Os sensores de

pressão foram aferidos por meio de um aferidor Druck DPI 615 com precisão de 0,025% de fundo de escala. O procedimento de aferição consiste em aplicar uma pressão conhecida ao instrumento e adquirir o sinal analógico (4-20 mA) de saída correspondente a pressão aplicada através de um programa concebido no software LabVIEW®. O procedimento é repetido aumentando-se gradualmente a pressão até ser atingido o fundo de escala do sensor, atingido o valor máximo lido pelo instrumento, repete-se o procedimento diminuindo gradativamente a pressão do valor máximo até a pressão atmosférica. A realização da calibração no sentido crescente e decrescente da medição tem como finalidade mitigar eventuais erros induzidos por histerese no instrumento.

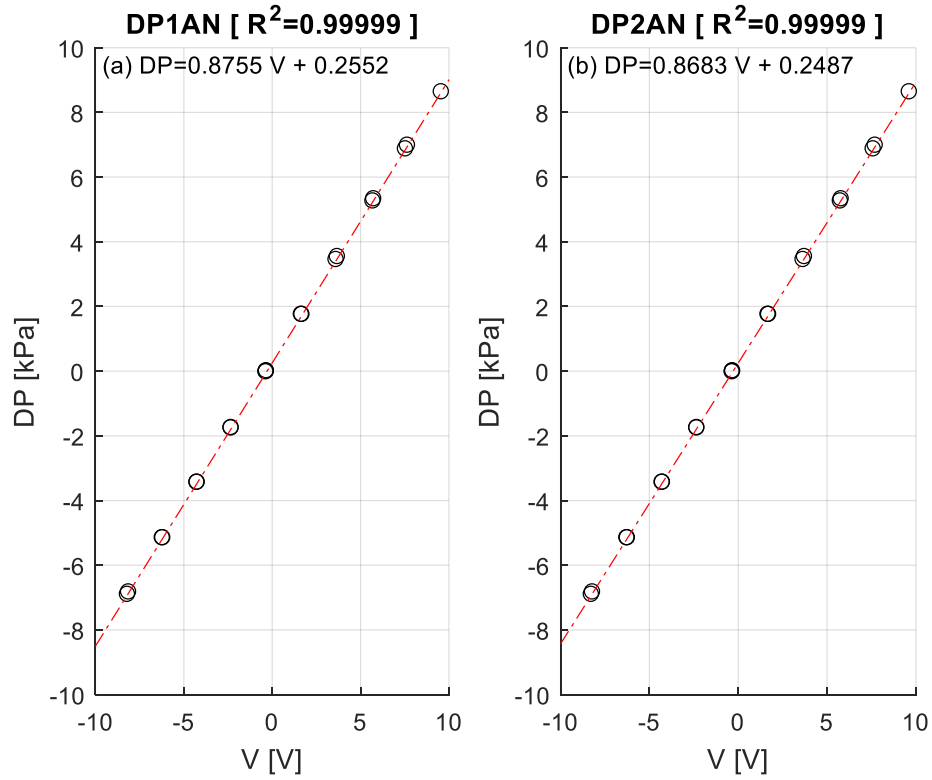
A aferição do sensor de temperatura foi realizada por meio de um banho termostático e um termômetro de mercúrio de alta precisão. O procedimento de aferição consiste em colocar o termômetro imerso no banho termostático, atingir a temperatura desejada do banho, comparar a temperatura do banho com a temperatura do termômetro e registrar em um programa no software LabVIEW®. Com a temperatura do banho estabilizada e registrada, mergulha-se a termoresistência no banho e adquire-se o sinal analógico (4-20 mA) de saída correspondente a temperatura aplicada pelo banho através de um programa concebido no software LabVIEW®. Repete-se esse procedimento tanto para o aquecimento quanto para o resfriamento do banho, abrangendo toda a faixa de operação do instrumento.

Da Figura 3.27 a Figura 3.30 destacam-se os resultados das aferições obtidas para os instrumentos utilizados na bancada, nos gráficos das figuras abaixo são apresentadas também as equações de ajuste dos dados coletados, assim como o coeficiente de determinação  $R^2$ .

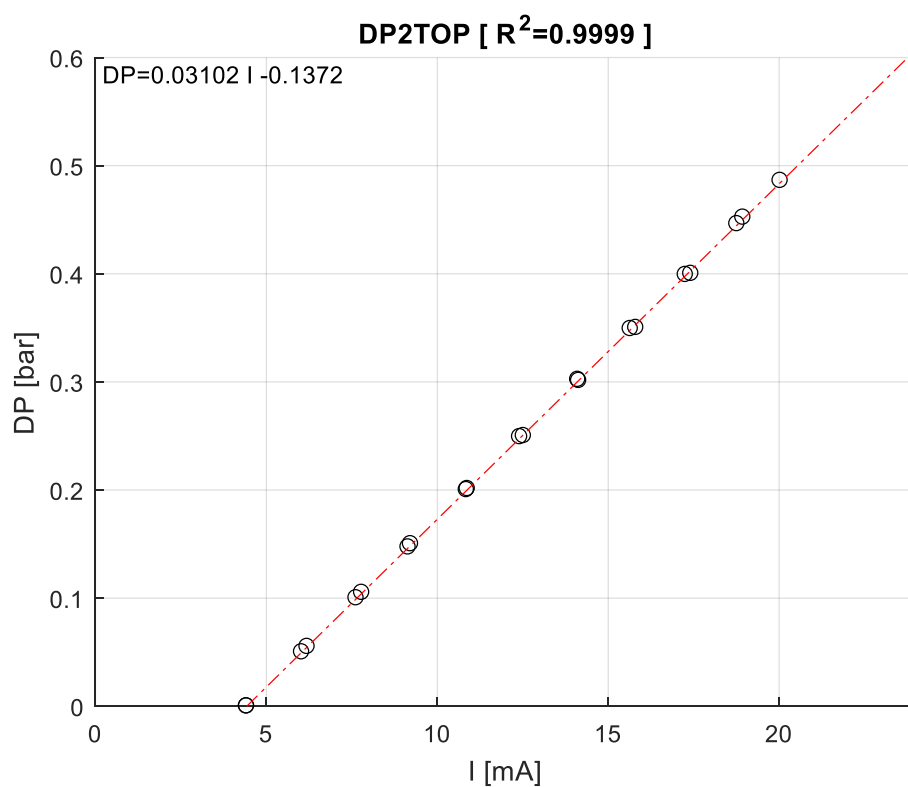




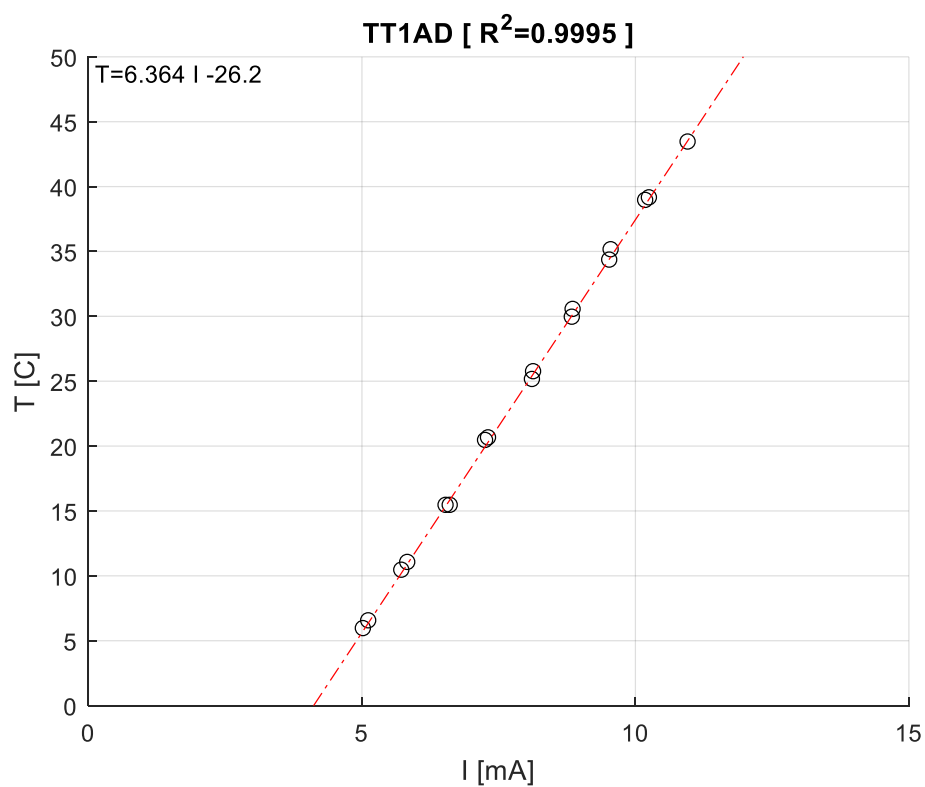
**Figura 3.27** – Curva de aferição dos sensores de pressão manométrica Rosemount.



**Figura 3.28** – Curva de aferição dos sensores de pressão diferencial Validyne.



**Figura 3.29** – Curva de aferição do transdutor de pressão diferencial SMAR.



**Figura 3.30** – Curva de aferição do sensor de temperatura PT – 100.

### 3.2.5 Procedimentos Experimentais

Os experimentos realizados têm como objetivo a coleta de dados operacionais que possibilitem a análise detalhada do fenômeno de separação gás-líquido no escoamento bifásico no duto anular, além da determinação de padrões e parâmetros de escoamento. Para tal, desenvolveu-se uma matriz de testes na qual variam-se as frações de vazio sem escorregamento e a vazão de líquido como indicado na Tabela 3.13.

**Tabela 3.13** – Matriz de testes: medidores de vazão mássica utilizados

$j_1[m/s]$	$\lambda[\%]$				
	10	20	30	40	50
0.10		BX	BX	BX	BX
0.19	BX	BX	BX	BX	BX
0.41	AX	AX	AX	AX	AX
0.54	AX	AX	AX	AX	AX
0.67	AX	AX	AX	AX	AX
1.00	AX	AX	AX	AX	AX

Onde BX representa o medidor de baixa vazão mássica de líquido e AX o de alta, cujas especificações foram indicadas na Tabela 3.12. Por ter uma vazão mássica de ar muito baixa impossibilitando a aquisição, descartou-se o ponto 1 da matriz de testes indicada na Tabela 3.5 e Tabela 3.13, sendo assim, os 29 pontos restantes foram ensaiados a uma inclinação de 5° a fim de observar e investigar a separação gás/líquido no *intake*. A seguir, apresentam-se os procedimentos adotados para aquisição dos dados experimentais, que consistem, basicamente, em ajustar as vazões mássicas de líquido e de gás, além da pressão e temperatura de operação da bancada a fim de alcançar as velocidades superficiais e frações de vazio sem escorregamento pré-definidas na matriz de testes. Ao atingir-se uma operação estável em regime permanente, gravam-se os dados e parte-se para a fase de estimativa da eficiência de separação média. Esta etapa consiste em drenar o ar acumulado no topo do duto anular e contabilizar o tempo necessário para o preenchimento. Por fim, parte-se para um novo ponto da matriz de testes.

Segue a descrição passo a passo do procedimento proposto:

1. A priori, deve-se verificar a atuação de todas as válvulas nas linhas de líquido e de ar a fim de garantir que os alinhamentos de fluidos estejam corretos e sem restrições ou bloqueios. Certifica-se que o curso da haste da válvula globo do reciclo de fluidos esteja correto com meia volta de abertura.
2. Em seguida, liga-se o inversor da *booster*, posicionando-o no modo remoto e aciona-se o sistema de ar. Na bancada de aquisição de sinais, liga-se o *nobreak*, onde os principais equipamentos estão ligados: fontes, chassis de aquisição de sinais e o microcomputador.
3. Abre-se a válvula de entrada de ar na admissão à montante na bancada e fecha-se a válvula de alívio e drenagem do topo do duto anular.
4. Inicia-se o programa no LabVIEW®, testa-se a válvula *choke* e a válvula de controladora de vazão de ar com um ciclo completo de abertura e fechamento, a fim de diminuir erros de histerese para as aquisições das vazões mais baixas.
5. Abre-se integralmente a válvula *choke* e aciona-se a bomba *booster* com o intuito de circular líquido por alguns minutos a fim de remover ar e impurezas das linhas e da bancada. Recomenda-se a circulação equivalente a 3x o inventário de fluidos do sistema na maior vazão possível.
6. Em seguida, liga-se o aparato de visualização, a câmera e o microcomputador conectado a ela.
7. Certifica-se de que todos os instrumentos da bancada estão funcionando adequadamente a partir das leituras no programa em LabVIEW®: verificar se há leitura, se estão congelados ou se aparentam ruídos anormais.
8. Ao começar a aquisição dos pontos, registra-se no programa a inclinação da bancada e o nome do arquivo a ser amostrado com uma taxonomia de acordo com o ponto da matriz de testes.

9. Fecham-se as válvulas de equalização dos transdutores de pressão diferencial Validyne, de modo que estes comecem a medir a pressão diferencial.
10. Ajustam-se os parâmetros de escoamento visando obter as variáveis pré-definidas na matriz de testes (Tabela 3.13): curso da haste das válvulas *choke* e controladora de vazão de ar além da rotação da bomba *booster*. Uma vez atingidos os parâmetros da matriz de testes (frações de vazio sem escorregamento e velocidade superficial de líquido), aguarda-se a estabilização parâmetros adquiridos até que o escoamento possa ser considerado em regime permanente. Deve-se ressaltar que a pressão interna de operação da bancada foi definida em 2 bar, portanto o curso da haste das válvulas *choke* deve ser ajustado para honrar este *setpoint* também.
11. Após a estabilização, registra-se no programa qualquer eventualidade observada no escoamento além dos padrões de escoamento no aquário de visualização da admissão e no duto anular à montante do *intake*.
12. Em seguida, utilizando a válvula de alívio instalada no topo do duto anular, drena-se o ar acumulado e cronometra-se o tempo em que o duto anular à jusante do *intake* é preenchido pelo ar segregado, até que a interface gás-líquido alcance uma marca pré-estabelecida localizada a 1,98 m do topo (posição de um dos flanges). Esse procedimento é repetido cinco vezes, a fim de reduzir e quantificar incertezas referentes ao estudo da eficiência de separação de gás pelo separador gás-líquido localizado no *intake*.
13. Por fim, aguarda-se a estabilização dos parâmetros lidos e gravam-se os dados. Como citado previamente, o *trigger* das câmeras estão sincronizados com o programa (Figura 3.25), portanto o acionamento final da gravação dos dados oriundos dos sensores da bancada se dá através da gravação do vídeo. Para tal, deve-se acionar o botão *trigger* no programa, quando iniciada a gravação dos vídeos, automaticamente, a geração dos arquivos de dados será simultânea e sincronizada com os vídeos gravados.
14. Confirma-se o êxito no registro dos arquivos e nas gravações.

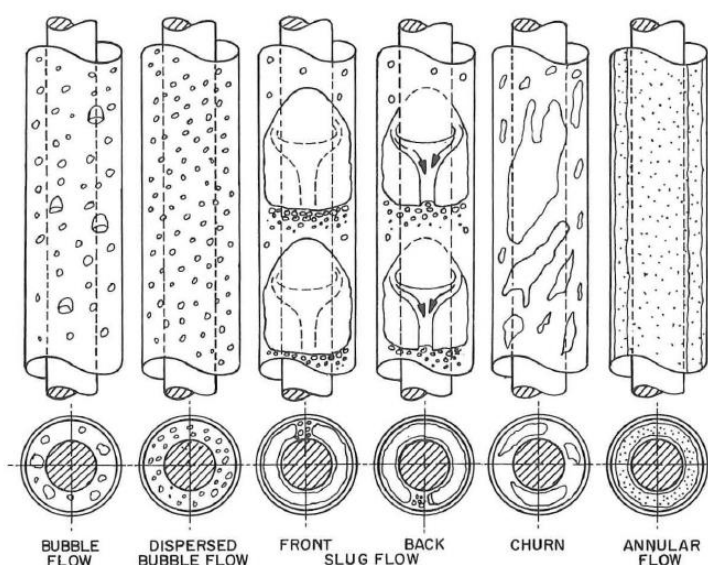
15. Para o próximo ponto da matriz de testes, abre-se a válvula de equalização dos capilares preenchidos com água conectados às tomadas de pressão dos transdutores Validyne. Repete-se o procedimento a partir do item 8.
16. Ao final dos experimentos, gradualmente diminui-se a rotação da bomba, o curso da haste da válvula reguladora de injeção de ar e alivia-se a restrição da *choke*, até que o escoamento cesse e a bancada esteja despressurizada.
17. Desliga-se o aparato de visualização.
18. Fecha-se a válvula de injeção de ar na bancada e abre-se a válvula de alívio instalada no topo.
19. Desliga-se o computador, os módulos de aquisição de dados, as fontes e o nobreak.
20. Por fim, desliga-se o sistema de ar e o inversor da bomba *booster*.

## 4 ANÁLISE DO ESCOAMENTO BIFÁSICO INTERMITENTE EM DUTOS ANULARES

O objetivo deste capítulo é analisar o escoamento intermitente no duto anular a partir do levantamento dos principais parâmetros da célula unitária através do processamento de imagens. A assinatura temporal do sinal de pressão diferencial também será avaliada e correlacionada com as ondas de fração de vazios.

### 4.1 Escoamento Intermitente

Pode-se definir os escoamentos multifásicos como aqueles onde há a presença de duas ou mais fases escoando simultaneamente, sendo que uma fase pode ser definida como um estado da matéria (sólido, líquido e gasoso). Os padrões de escoamento (Figura 4.1) são os inúmeros arranjos geométricos em que as fases podem se distribuir, nestes, a fase gasosa é transportada com uma determinada velocidade e se distribui ao longo do duto, criando oscilações espaciais no campo da fração de vazio que possuem as dimensões das estruturas ou arranjos geométricos observados (bolhas pequenas ou grandes, por exemplo) (SHOHAM, 2005b).



**Figura 4.1** - Padrões de escoamento pra um duto anular vertical (CAETANO; SHOHAM; BRILL, 1992b)

Sumarizando, de um ponto de vista matemático, defende-se que o padrão de escoamento se manifesta como uma forma de onda de frações de vazio, cujas propriedades podem ser utilizadas para detectar e descrever o padrão observado. Tal forma de onda pode ser decomposta em um termo médio  $\bar{\alpha}$  associado às oscilações entorno da média  $\alpha'(x, t)$  e como esta forma de onda é transportada (velocidade e atenuação), ou seja:

$$\alpha(x, t) = \bar{\alpha} + \alpha'(x, t) \quad (4.1)$$

Assumindo uma expansão de modos de onda, tal onda seria representada pelo seguinte ansatz:

$$\alpha'(x, t) = \sum_n A_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} \quad (4.2)$$

Para cada número de onda  $k_n$ , há uma frequência  $\omega_n$  e uma amplitude modal  $A_n$ .  
Ou:

$$\alpha'(x, t) = \sum_n A_n e^{ik_n(x - c_p t)} \quad (4.3)$$

Onde a velocidade de fase  $c_p$  é dada por:

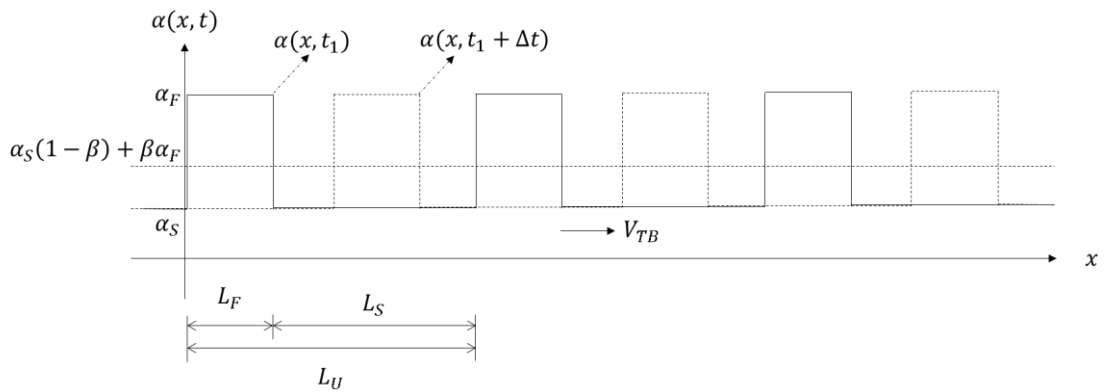
$$c_p = \frac{\omega_n}{k_n} \quad (4.4)$$

De maneira geral, os números de onda e as frequências são números complexos. Desta forma, pode haver atenuação ou amplificação no espaço ou no tempo da onda de fração de vazios (SCHMID; HENNINGSON, 2001; WALLIS, 1969). Porém, dada a pequena distância entre as tomadas de pressão como mostrado na Tabela 3.11 e o interesse nos termos propagantes, é razoável assumir que os números de onda e as frequências sejam números reais puros. Tipicamente, ondas evanescentes decaem rapidamente e são associadas a descontinuidades no escoamento. Desta forma, o número de onda  $k_n$  representa as dimensões



características das estruturas transportadas que podem ser relacionadas intuitivamente ao diâmetro médio de bolhas ou comprimento médio da bolha de Taylor, por exemplo, enquanto que a velocidade de fase  $c_p$  indica em qual velocidade este transporte ocorrerá, estaria, portanto, ligada intuitivamente à velocidade *in situ* da fase gasosa.

Desta forma, inspirado pelo trabalho de Fabre et al.(1989), pode-se modelar o transporte da célula unitária do escoamento intermitente como uma onda de fração de vazio equivalente a um trem de pulsos quadrados como ilustrado na Figura 4.2 (FABRE; LINE; PERESSON, 1989).



**Figura 4.2** – Trem de pulsos quadrados representando o transporte da célula unitária

Onde o fator de intermitência  $\beta$  pode ser interpretado como o *duty cycle* do trem de pulsos (fração de tempo em que este se encontra em estado ativo), o comprimento da célula unitária  $L_U$  como o inverso do número de onda fundamental, a velocidade da bolha de Taylor  $V_{TB}$  como a velocidade de fase que neste caso específico é equivalente à velocidade da onda cinemática que será discutida adiante no APÊNDICE A.1, enquanto que o fator de intermitência  $f_u$  é o inverso do período de trânsito da onda de fração de vazio (ARRUDA; HUALLPA, 2008). A fração de vazio média é dada por:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L_U} \int_0^{L_U} \alpha(x, t) dx = \frac{1}{L_U} (\alpha_F L_F + \alpha_S L_S) = \alpha_F \beta + \alpha_S (1 - \beta) \quad (4.5)$$

onde  $\alpha_F$  é a fração de vazio na região da bolha de Taylor e  $\alpha_S$  no pistão de líquido. A série de Fourier complexa do trem de pulsos quadrados modificado representado pelo desvio da onda de fração de vazio em relação à fração de vazio do pistão de líquido é dada por:

$$A_n = \frac{1}{L_u} \int_0^{L_u} [\alpha(x, t) - \alpha_S] e^{-ik_n x} dx = \frac{1}{L_u} \int_0^{L_f} (\alpha_F - \alpha_S) e^{-ik_n x} dx \quad (4.6)$$

$$A_n = (\alpha_F - \alpha_S) \beta \text{sinc} \left( \frac{k_n L_f}{2} \right) e^{-i \frac{k_n L_f}{2}} \quad (4.7)$$

onde o número de onda  $k_n$  é um múltiplo inteiro do número de onda fundamental:

$$k_n = nk_0 = n \frac{2\pi}{L_u} \quad (4.8)$$

Portanto:

$$A_n = (\alpha_F - \alpha_S) \beta \text{sinc}(n\pi\beta) e^{-in\pi\beta} \quad (4.9)$$

A onda trafegará com uma velocidade de fase  $c_p$  constante, ou seja, é uma onda não dispersiva, isso significa que a forma de onda representada na Figura 4.2 somente sofrerá um atraso puro, defasada ao longo de  $x$ , sem distorção de forma ao longo do tempo e ao longo do duto. Logo, basta utilizar a propriedade de atraso puro da série de Fourier para representar tal deslocamento (ARRUDA; HUALLPA, 2008):

$$\alpha(x, t) = \bar{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{ik_n(x - c_p t)} \quad (4.10)$$

onde:

$$\bar{\alpha} = \alpha_F \beta + \alpha_S (1 - \beta) \quad (4.11)$$

$$A_n = (\alpha_F - \alpha_S) \beta \text{sinc}(n\pi\beta) e^{-in\pi\beta} \quad (4.12)$$

$$c_p = V_{TB} \quad (4.13)$$

Ou seja, pode-se visualizar o padrão intermitente como trem de pulsos propagante que é completamente caracterizado pelos parâmetros  $\alpha_F$ ,  $\alpha_S$ ,  $\beta$  e  $V_{TB}$ . Apesar do discutido até aqui, é importante frisar que as frações de vazio do escoamento não serão medidas neste trabalho. Isso acontece porque tal medida não tem viabilidade prática. Somente medidas de pressão diferencial são disponíveis, portanto, deve-se discutir como estas duas grandezas estão acopladas e como medir a influência da onda de fração de vazios na pressão diferencial com o intuito de identificar propriedades do escoamento intermitente no duto anular a partir da análise da assinatura temporal da pressão diferencial.

## 4.2 Modelo Homogêneo

Necessita-se de uma forma de relacionar a fração de vazio com o diferencial de pressão medido em um trecho de um duto anular. A forma mais simples de realizar esta associação é a partir do Modelo Homogêneo, que, apesar das limitações de modelagem tais como não considerar escorregamento, nos dará uma ideia inicial de como estas grandezas se acoplam além de como normalizá-las para reduzir os efeitos de escala.

Considerando-se um duto anular de seção constante, com escoamento isotérmico, sem transferência de massa entre as fases e de baixa velocidade (baixo número de Mach, logo, incompressível)(WALLIS, 1969):

$$\frac{dP}{dx} = \rho_m g \cos \theta + \frac{2}{D_H} C_f \rho_m j_m^2 \quad (4.14)$$

Neste caso, considera-se as variáveis localmente constantes exceto pela onda de fração de vazio  $\alpha$ , desta forma a massa específica da mistura  $\rho_m$  é dada por:

$$\rho_m = (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2 \quad (4.15)$$

Substituindo a Equação (4.1) na (4.15), temos:

$$\rho_m = [1 - (\bar{\alpha} + \alpha')]\rho_1 + (\bar{\alpha} + \alpha')\rho_2 \quad (4.16)$$

$$\rho_m = \overline{\rho_m} + (\rho_2 - \rho_1)\alpha' \quad (4.17)$$

Onde  $\overline{\rho_m}$  representa a massa específica da mistura média:

$$\overline{\rho_m} = (1 - \bar{\alpha})\rho_1 + \bar{\alpha}\rho_2 \quad (4.18)$$

A Equação (4.17) representa a alteração da massa específica da mistura induzida pelas oscilações da fração de vazio. Substituindo a Equação (4.17) na Equação (4.14) temos:

$$\frac{dP}{dx} = \left( \overline{\rho_m} g \cos \theta + \overline{\rho_m} \frac{2}{D_H} C_f j_m^2 \right) + (\rho_2 - \rho_1) \alpha' \left( g \cos \theta + \frac{2}{D_H} C_f j_m^2 \right) \quad (4.19)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (4.19) é constante e está relacionado ao valor médio do gradiente de pressão, enquanto que o segundo termo representa as flutuações entorno da média induzidas pelas oscilações na fração de vazios. Reescreve-se a Equação (4.19):

$$\left( \frac{dP}{dx} \right) = \overline{\left( \frac{dP}{dx} \right)} + \overline{\left( \frac{dP}{dx} \right)} \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\overline{\rho_m}} \right) \alpha' \quad (4.20)$$

Onde o gradiente de pressão médio é dado por:

$$\overline{\left( \frac{dP}{dx} \right)} = \overline{\rho_m} g \cos \theta + \overline{\rho_m} \frac{2}{D_H} C_f j_m^2 \quad (4.21)$$

O gradiente de pressão pode ser aproximado:

$$\frac{dP}{dx} \approx \frac{\Delta P}{L_s} \quad (4.22)$$

Onde  $\Delta P$  é a pressão diferencial e  $L_s = 2a$  é a distância que separa as duas tomadas da sonda de pressão diferencial. Substituindo a Equação (4.22) na (4.20) temos:

$$\frac{\Delta P}{L_s} = \overline{\left(\frac{\Delta P}{L_s}\right)} + \overline{\left(\frac{\Delta P}{L_s}\right)} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\bar{\rho}_m}\right) \alpha' \quad (4.23)$$

Isolando a flutuação da fração de vazios  $\alpha'$ , tem-se que:

$$\alpha' = \left(\frac{\Delta P - \bar{\Delta P}}{\bar{\Delta P}}\right) \left(\frac{\bar{\rho}_m}{\rho_2 - \rho_1}\right) \quad (4.24)$$

A Equação (4.24) representa o acoplamento buscado entre as oscilações da fração de vazio e a pressão diferencial normalizada. Esta abordagem possui a vantagem de não incluir os termos estacionários da Equação (4.19), pois o próprio sinal adquirido já fornece esta informação, bastando calcular a média e possuir as propriedades dos fluidos.

Pode-se analisar os efeitos da aproximação advinda do uso do gradiente médio na Equação (4.23) a partir da realização da integração analítica dos sinais:

$$\Delta P = \int_{-a}^a \frac{dP}{dx} dx \quad (4.25)$$

Substituindo a Equação (4.20) na (4.25):

$$\Delta P = \int_{-a}^a \left[ \overline{\left(\frac{dP}{dx}\right)} + \overline{\left(\frac{dP}{dx}\right)} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\bar{\rho}_m}\right) \alpha' \right] dx \quad (4.26)$$

$$\Delta P = \overline{\left(\frac{dP}{dx}\right)} L_s + \overline{\left(\frac{dP}{dx}\right)} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\bar{\rho}_m}\right) \int_{-a}^a \alpha' dx \quad (4.27)$$

A relação entre o gradiente médio e o diferencial médio de pressão é direta, portanto:

$$\Delta P = \bar{\Delta P} + \frac{\bar{\Delta P}}{L_s} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\bar{\rho}_m}\right) \int_{-a}^a \alpha' dx \quad (4.28)$$

Substituindo a Equação (4.2), que define as flutuações de fração de vazio na forma modal como representada, na Equação (4.28), então:

$$\Delta P = \overline{\Delta P} + \frac{\overline{\Delta P}}{L_s} \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\overline{\rho_m}} \right) \int_{-a}^a \sum_n A_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} dx \quad (4.29)$$

$$\Delta P = \overline{\Delta P} + \overline{\Delta P} \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\overline{\rho_m}} \right) \sum_n A_n e^{-i\omega_n t} \overbrace{\left( \frac{\sin k_n a}{k_n a} \right)}^{\text{sinc}(k_n a)} \quad (4.30)$$

Na Equação (4.30), a amplitude é multiplicada pela função sinc que leva à atenuação de determinados modos de onda:

$$\Delta P = \overline{\Delta P} + \overline{\Delta P} \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\overline{\rho_m}} \right) \sum_n \overbrace{[A_n \text{sinc}(k_n a)]}^{\overbrace{A_n^*}^{\alpha^*(t)}} e^{-i\omega_n t} \quad (4.31)$$

Ou seja, isola-se a estimativa para a flutuação da fração de vazios modificada:

$$\alpha^*(t) = \left( \frac{\Delta P - \overline{\Delta P}}{\overline{\Delta P}} \right) \left( \frac{\overline{\rho_m}}{\rho_2 - \rho_1} \right) = \sum_n A_n^* e^{-i\omega_n t} \quad (4.32)$$

A partir das Equações (4.4), (2.12), (4.8) e (4.13), a frequência e o número de onda são dados em função do comprimento  $L_u$  e da frequência  $f_u$  da célula unitária:

$$\omega_n = k_n c_p = n 2\pi \frac{V_{TB}}{L_u} = n 2\pi f_u \quad (4.33)$$

Ou seja, espera-se que as frequências observadas sejam harmônicas da frequência da célula unitária. Portanto, substituindo a Equação (4.33) na (4.32):

$$\alpha^*(t) = \left( \frac{\Delta P - \overline{\Delta P}}{\overline{\Delta P}} \right) \left( \frac{\overline{\rho_m}}{\rho_2 - \rho_1} \right) = \sum_n A_n^* e^{-i 2\pi n f_u t} \quad (4.34)$$

A amplitude modal modificada pode ser escrita a partir da Equação (4.31):

$$A_n^* = A_n \operatorname{sinc}(k_n a) \quad (4.35)$$

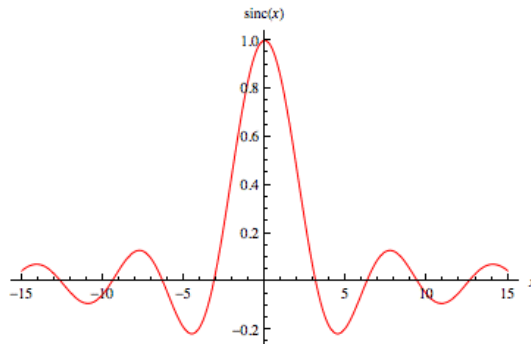
Seja a distância entre as tomadas dada por:

$$L_S = 2a \quad (4.36)$$

A amplitude modal modificada pode ser escrita a partir das Equações (4.12), (4.35) e (4.36):

$$A_n^* = (\alpha_F - \alpha_S) \beta \operatorname{sinc}(n\pi\beta) \operatorname{sinc}\left(n\pi \frac{L_S}{L_u}\right) e^{-in\pi\beta} \quad (4.37)$$

A função sinc possui o seguinte formato:



**Figura 4.3-** Função  $\operatorname{sinc}(x)$  com  $-15 < x < 15$ .

Ou seja, se  $k_n a$  for pequeno o suficiente, a amplitude do espectro da série temporal da oscilação de fração de vazio não será demasiadamente atenuada, porém, caso contrário alguns modos de onda serão atenuados. Logo, há uma relação entre a distância entre as duas tomadas de pressão e o comprimento de onda que é possível observar, ideia similar ao teorema da amostragem (ARRUDA; HUALLPA, 2008; OPPENHEIM; SCHAFER, 1975; PROAKIS; MANOLAKIS, 2007).

Para que não haja uma atenuação severa dos números de onda sob análise, deve-se garantir que  $k_n a$  seja inferior a primeira raiz da função sinc exibida na Figura 4.3, portanto, tem-se que:

$$k_n a = \frac{2\pi L_s}{\lambda_n} \frac{L_s}{2} < \pi \Leftrightarrow \lambda_n > L_s \quad (4.38)$$

Somente comprimentos de onda maiores que a distância entre as tomadas de pressão que serão devidamente representados, os menores serão atenuados. Este resultado explica as observações empíricas de Matsui (1984 e 1986) sobre a distância das tomadas de pressão e as escalas observadas reportadas na Seção 2.2.

Esta informação pode ser utilizada para projetar as distâncias entre as tomadas de pressão a partir do fato que o comprimento de onda característico pode ser relacionado ao diâmetro típico de bolha. Desta forma, para o contexto experimental com o padrão golfadas, tem-se duas escalas características das ondas de fração de vazios. Uma pequena, associada ao diâmetro das bolhas dispersas na esteira das bolhas de Taylor, e outra maior, associada ao comprimento da bolha de Taylor. Como há modelos na literatura para estimar tais dimensões, pode-se projetar as distâncias entre as tomadas de pressão para capturar o comportamento de cada escala.

A partir da Equação (4.24), têm-se uma proposta de normalização do sinal de pressão diferencial além de fisicamente interpretá-la como reflexo das oscilações das ondas de fração de vazio características de cada padrão de escoamento que deseja-se caracterizar, enquanto que as Equações (4.34) e (4.35) explicam o mecanismo de atenuação de tais ondas, o que além de explicar o relatado pela Revisão Bibliográfica na Figura 2.6 por Matsui (1984), permite o projeto das distâncias entre as tomadas de pressão visando separar diferentes escalas do escoamento para posterior análise. No APÊNDICE A.3 discute-se com maiores detalhes o acoplamento entre as ondas de fração de vazio e de pressão a partir do modelo de mistura linearizado.

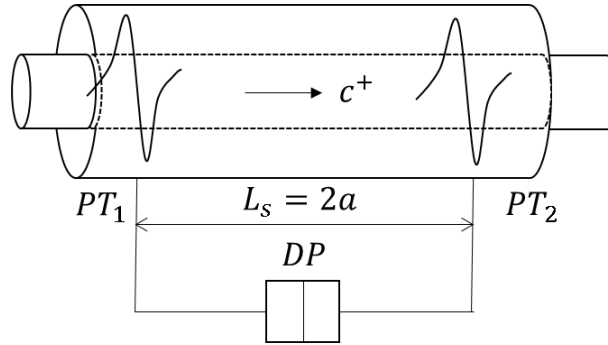
### 4.3 Sonda de Pressão Diferencial

A sonda de pressão diferencial gera uma série temporal que equivale à diferença dos valores instantâneos do campo de pressão na tubulação entre dois pontos do espaço (tomadas 1 e 2).

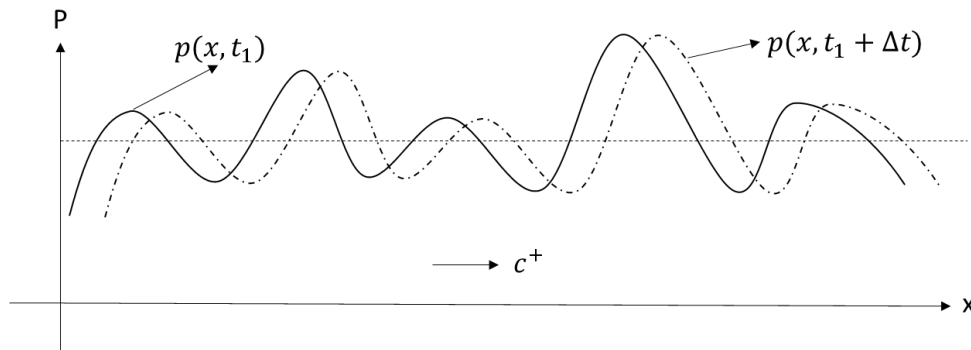
$$\Delta P(t) = P_{T2} - P_{T1} \quad (4.39)$$



Por se tratar de um problema de transporte, pode-se argumentar que o campo de pressão ao longo do tempo se comporta como uma onda propagando ao longo do duto como indicado na Figura 4.4 e Figura 4.5 com velocidades, números de onda e frequências próprias, além de apresentar atenuação devido ao gradiente de pressão. Ademais, adiciona-se um termo de ruído associado à turbulência gerada somada a ruídos de medição.



**Figura 4.4** – Sonda de pressão diferencial no duto anular



**Figura 4.5** – Onda de pressão transportada

Desta forma, pode-se afirmar que a pressão  $P_{T2}$  medida na segunda tomada em  $x_2$  equivale à pressão  $P_{T1}$  medida na primeira tomada em  $x_1$  algum tempo antes (com atraso), atenuada por um diferencial gerado pelo gradiente médio de pressão  $\overline{\Delta P}$  e somada ao ruído advindo de fenômenos turbulentos e da medição  $\eta$ :

$$P_{T1} = p(x_1, t) \quad (4.40)$$

$$P_{T2} = p(x_2, t) + \overline{\Delta P} + \eta(t) \quad (4.41)$$

Substituindo a Equação (4.40) e (4.41) na (4.39):

$$\Delta P(t) = p(x_2, t) - p(x_1, t) + \overline{\Delta P} + \eta(t) \quad (4.42)$$

Como o campo de pressão é uma onda transportada com velocidade  $c$  ao longo do duto, pode-se reescrever a Equação (4.42):

$$\Delta P(t) = p(x_2 + ct) - p(x_1 + ct) + \overline{\Delta P} + \eta(t) \quad (4.43)$$

Uma vez conhecida a distância entre as tomadas de pressão, relaciona-se  $x_1$  e  $x_2$ :

$$x_2 = x_1 + L_s \quad (4.44)$$

Substitui-se a Equação (4.44) na (4.43)

$$\Delta P(t) = p \left[ x_1 + c \left( t + \frac{L_s}{c} \right) \right] - p(x_1 + ct) + \overline{\Delta P} + \eta(t) \quad (4.45)$$

Seja o atraso definido como:

$$\Delta T = \frac{L_s}{c} \quad (4.46)$$

Substituindo a Equação (4.46) em (4.45):

$$\Delta P(t) - \overline{\Delta P} = \{p[x_1 + c(t + \Delta T)] - p(x_1 + ct)\} + \eta(t) \quad (4.47)$$

Sendo a posição da primeira tomada de pressão  $x_1$  uma constante, esta pode ser omitida, portanto, a partir deste ponto, a série  $p(t)$  é definida como a série temporal de pressão na primeira tomada de pressão:

$$\Delta P(t) - \overline{\Delta P} = [p(t + \Delta T) - p(t)] + \eta(t) \quad (4.48)$$

A Equação (4.48) pode ser normalizada e adimensionalizadas por uma constante, basta definirmos as pressões e ruído turbulento normalizados pela pressão diferencial média e

a razão de massas específicas como feito na Equação (4.24), aqui indicados com o sobrescrito linha:

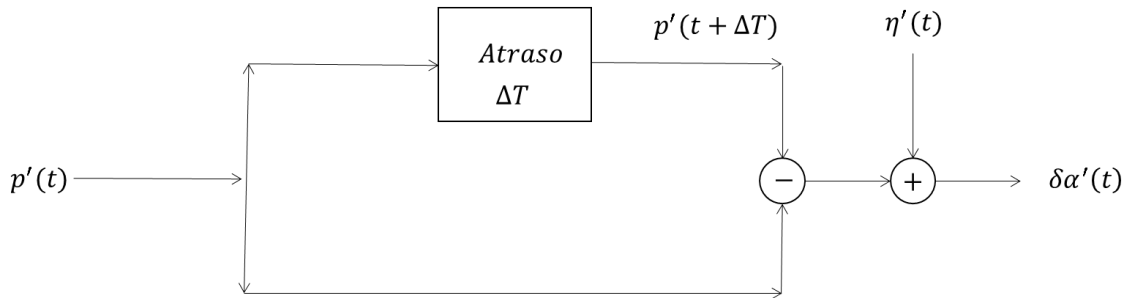
$$\delta\alpha(t) = \Delta p'(t) = \left( \frac{\Delta P(t) - \overline{\Delta P}}{\overline{\Delta P}} \right) \left( \frac{\rho_m}{\rho_2 - \rho_1} \right) = [p'(t + \Delta T) - p'(t)] + \eta'(t) \quad (4.49)$$

Onde:

$$p'(t) = \left[ \frac{p(x_1 + ct)}{\overline{\Delta P}} \right] \left( \frac{\rho_m}{\rho_2 - \rho_1} \right) \quad (4.50)$$

$$\eta'(t) = \left[ \frac{\eta(t)}{\overline{\Delta P}} \right] \left( \frac{\rho_m}{\rho_2 - \rho_1} \right) \quad (4.51)$$

A Equação (4.49) possui um formato interessante, pois a série de pressão diferencial normalizada  $\delta\alpha(t)$  representa a combinação de um sinal com sua versão atrasada adicionado de um ruído. Trata-se da formulação clássica do problema de eco em ambiente ruidoso:

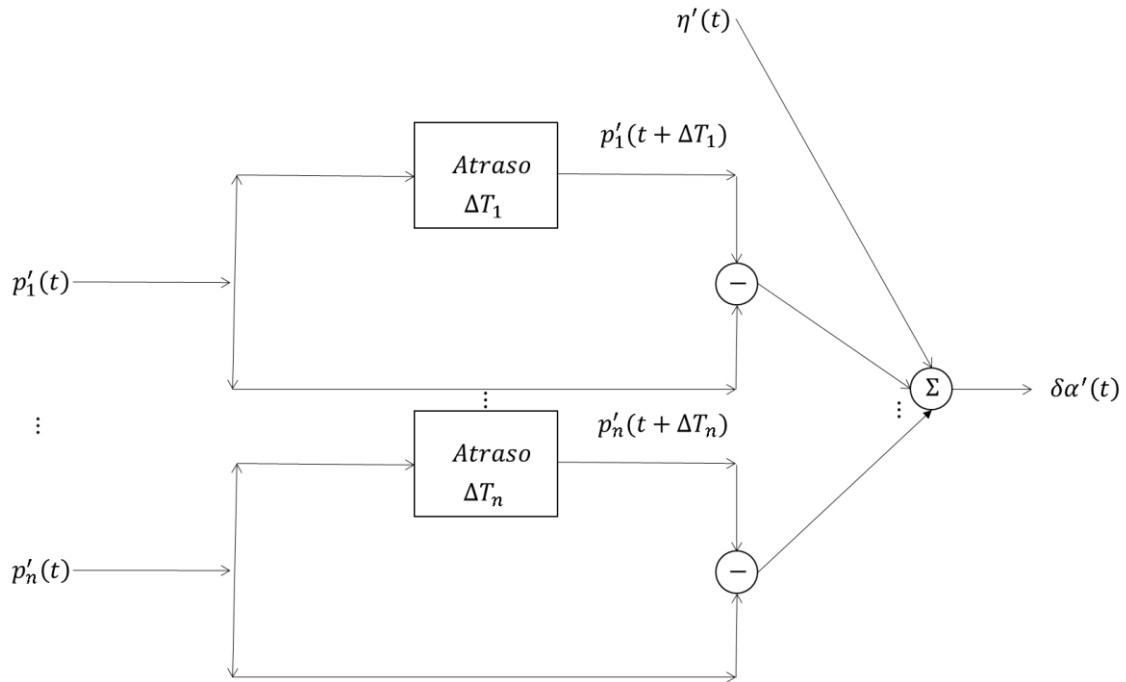


**Figura 4.6** – Diagrama de blocos do problema de eco

Sumarizando, a série temporal de pressão diferencial será normalizada antes da análise como ditado pela Equação (4.49). Desta forma, temos o problema de atraso supracitado na versão adimensionalizada e normalizada. Como as flutuações são relacionadas com a propagação de ondas de fração de vazio, o atraso  $\Delta T$  deve-se ao tempo de trânsito da onda cinemática, como discutido no APÊNDICE A.1 e no APÊNDICE A.4

No APÊNDICE B discute-se os métodos de processamento de sinais que visam a estimativa do atraso e consequentemente da velocidade de propagação. O principal problema é que se espera a superposição de diferentes velocidades de propagação de ondas no mesmo sinal

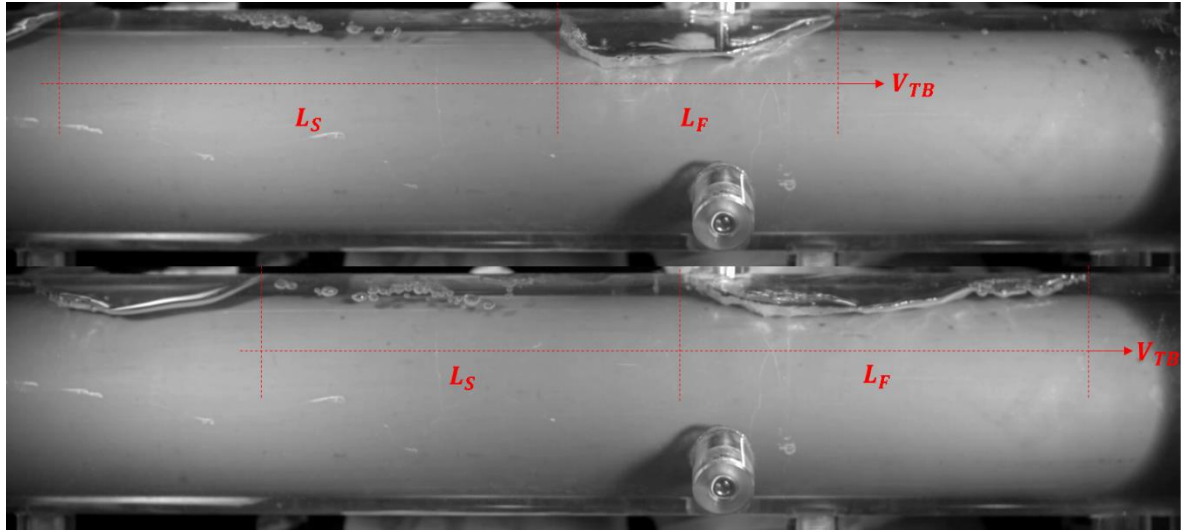
já que pode haver o acoplamento das pressões lidas com diferentes fenômenos que possuam diferentes velocidades de propagação, enquanto estamos interessados somente na onda cinemática. A priori, são esperadas no mínimo duas velocidades de propagação (sônica e onda cinemática) além da possibilidade de reflexões nas extremidades ou descontinuidades do sistema e a sobreposição com ruído turbulento.



**Figura 4.7** – Superposição de diferentes ecos devidos a diferentes velocidades de propagação

#### 4.4 Resultados

A partir da visualização do escoamento no duto anular com uma câmera de alta velocidade, implementou-se um algoritmo de processamento de imagens. Neste rastreou-se o nariz da bolha de Taylor visando medir sua velocidade  $V_{TB}$ , e comprimento  $L_F$ , além do comprimento do pistão de líquido  $L_S$ , como brevemente ilustrado na Figura 4.8, caracterizando desta forma os principais parâmetros da célula unitária.



**Figura 4.8** – Evolução da célula unitária e parâmetros geométricos e cinemáticos da Célula Unitária

Adicionalmente, estimou-se a função indicadora de fase como definida pela Equação (4.52) para as regiões de interesse (ROI) indicadas na Figura 4.9, onde as áreas destacadas em vermelho, amarelo e verde são relativas às tomadas de pressão 1, 2 e 3 respectivamente. A presença da bolha de Taylor foi identificada a partir da análise das séries temporais dos momentos estatísticos de até quarta ordem do campo de intensidade da imagem no interior das regiões de interesse, utilizados neste caso como descritores de textura (GONZALEZ; WOODS; EDDINS, 2004), uma vez que a passagem das bolhas perturba tais momentos cujos valores mais frequentes são relativos ao *background* que consiste do arranjo experimental preenchido com água. Portanto, para a identificação da passagem da bolha de Taylor, utilizou-se uma medida de dispersão dos momentos estatísticos supracitados, ou seja, um detector de *outlier*, onde o algoritmo MAD (*Median Absolute Deviation*) mostrou-se como o mais simples e robusto. Este algoritmo realiza uma medida de dispersão a partir da amplitude da série temporal sob análise em relação à sua mediana, normalizada pela mediana das amplitudes, portanto, um ponto é classificado como *outlier* se tal amplitude normalizada for superior à um *threshold* que depende da distribuição de probabilidade dos dados, geralmente entre 2 e 3 (utilizado 2.5). A importância em usar a mediana reside no fato desta não ser sensível à presença do *outlier*, ao contrário do operador de média (ROUSSEEUW; CROUX, 1993).

$$\chi = \begin{cases} 1 & ; \text{ gás presente} \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (4.52)$$



**Figura 4.9** – Regiões de interesse por tomada de pressão enumeradas para a obtenção da função indicadora de fase

Foram analisadas 449 células unitárias ao longo da matriz de testes indicada na Tabela 4.1 onde foram medidos os comprimentos do pistão de líquido e da bolha de Taylor além da velocidade de deslocamento da célula unitária. Na Tabela 4.1, marcou-se em vermelho os pontos onde não foi possível manter uma operação estável da bancada ou houve falha parcial na instrumentação e em amarelo os pontos onde o enxame de bolhas não permitiu a identificação clara da bolha de Taylor e do pistão de líquido através do processamento de imagens.

**Tabela 4.1** –Matriz de testes: 28 pontos experimentais

$j_1[m/s]/\lambda$ [%]	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %
<b>0.10</b>		1	2	3	4
<b>0.19</b>	5		6	7	8
<b>0.41</b>	9	10	11	12	13
<b>0.54</b>	14	15	16	17	18
<b>0.67</b>	19	20	21	22	23
<b>1.0</b>	24	25	26	27	28

Adaptou-se o modelo proposto por Bendiksen (1984) para o cálculo da velocidade de deslocamento da bolha de Taylor incorporando os modelos revisados para o escoamento intermitente vertical em dutos anulares. Essa adaptação deve considerar a dimensão característica do escoamento (diâmetro hidráulico equivalente, equiperiférico ou externo) e a expressão para o número de Froude com relação à consideração da razão de aspecto e sua versão bifásica. Desta forma, temos as seguintes combinações que serão comparadas com dados experimentais obtidos a partir do processamento de imagens:

- Bendiksen (1984) escrito para o diâmetro hidráulico equivalente  $D_H$  como feito por Nicklin et all. (1962):

$$V_{\infty TB} = (0.54 \cos \theta + 0.35 \sin \theta) \sqrt{g D_H} \quad (4.53)$$

- Bendiksen (1984) escrito para o diâmetro equiperiférico  $D_{eq}$  dado pela Equação (2.7) como sugerido por Sadatomi et all. (1982) e comprovado por Caetano et all. (1992):

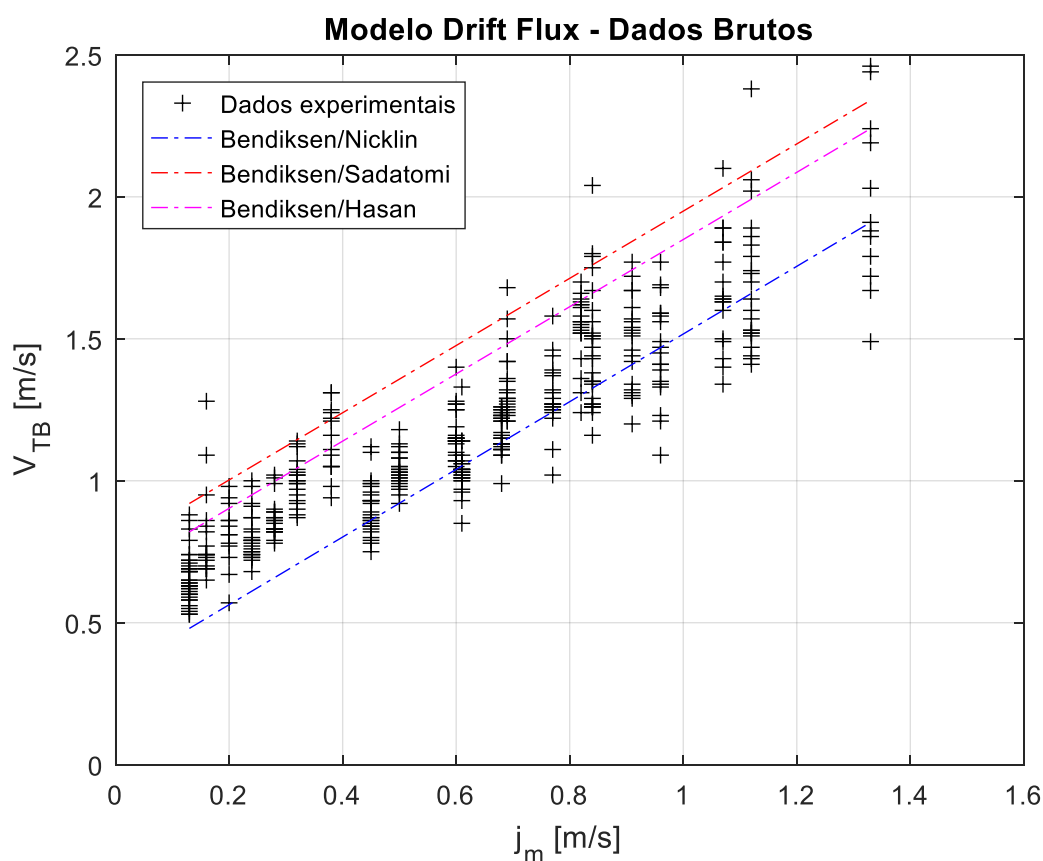
$$V_{\infty TB} = (0.54 \cos \theta + 0.35 \sin \theta) \sqrt{g D_{eq}} \quad (4.54)$$

- Bendiksen (1984) escrito para o diâmetro externo  $D_e$  com número de Froude bifásico dependente da razão de aspecto como sugerido por Hasan e Kabir (1992) e comprovado por Mendes (2012):

$$V_{\infty TB} = [0.54(1 + 0.185r_a) \cos \theta + 0.345(1 + 0.290r_a) \sin \theta] \sqrt{\frac{\Delta\rho_{1-2}}{\rho_1} g D_e} \quad (4.55)$$

Neste último caso, deve-se dar atenção especial à componente horizontal, que não foi testada por Hasan e Kabir (1992), apesar de haver resultados indicando um número de Froude próximo de 0.54, não há nada na literatura em relação à razão de aspecto.

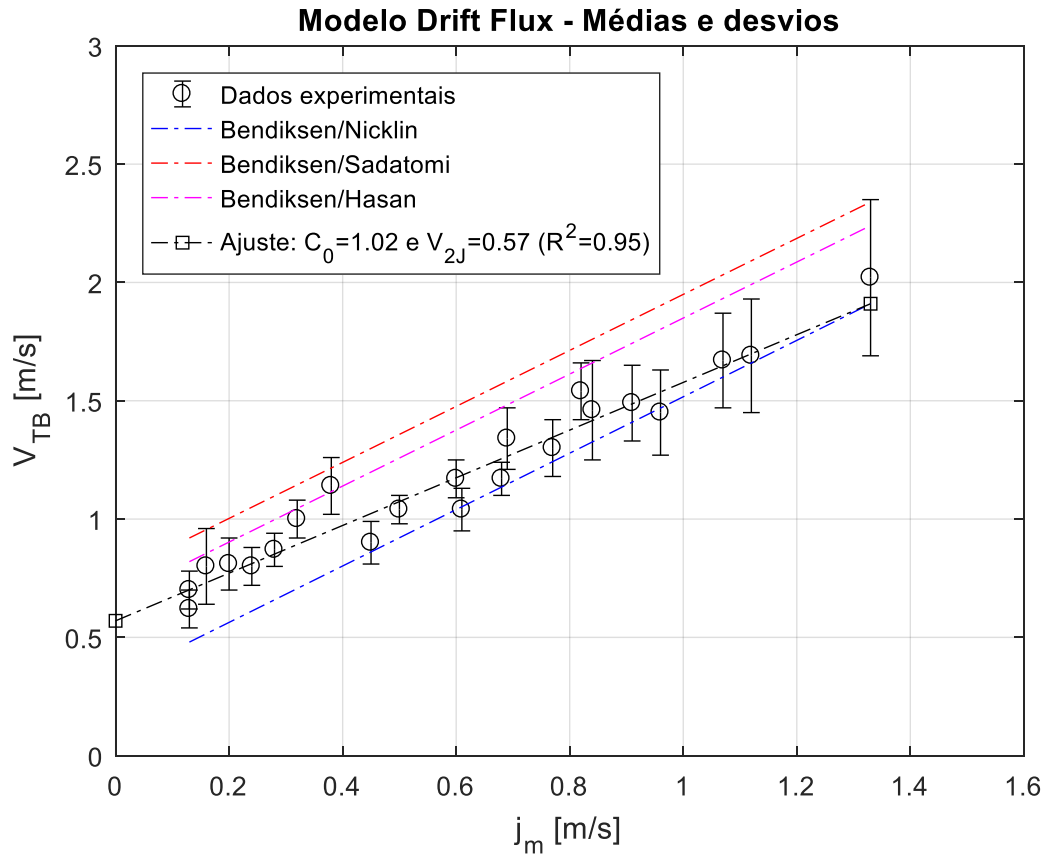
Os dados de velocidade obtidos foram plotados na Figura 4.10 e comparados aos modelos adaptados da literatura, onde, em linhas gerais, os modelos revisados representados pelas Equações (4.53), (4.54) e (4.55) formam uma banda que engloba a maioria das velocidades observadas.



**Figura 4.10** – Dados experimentais (+) de velocidade de ascensão da bolha de Taylor  $V_{TB}$  em função da velocidade de mistura  $j_m$  comparados com modelos da literatura

A partir de uma regressão linear, ajustou-se as velocidades médias à forma clássica do modelo de *Drift Flux* representada na Equação (2.1) obtendo-se os coeficientes de distribuição e o fluxo de escorregamento como exibidos na Figura 4.11 e Equações (4.56) e (4.57).





**Figura 4.11** – Dados médios de velocidade comparados com modelos da literatura

A partir do ajuste supracitado, obteve-se o coeficiente de distribuição  $C_0$  e a velocidade de ascensão da bolha de Taylor em um meio infinito e estacionário  $V_{\infty TB}$ :

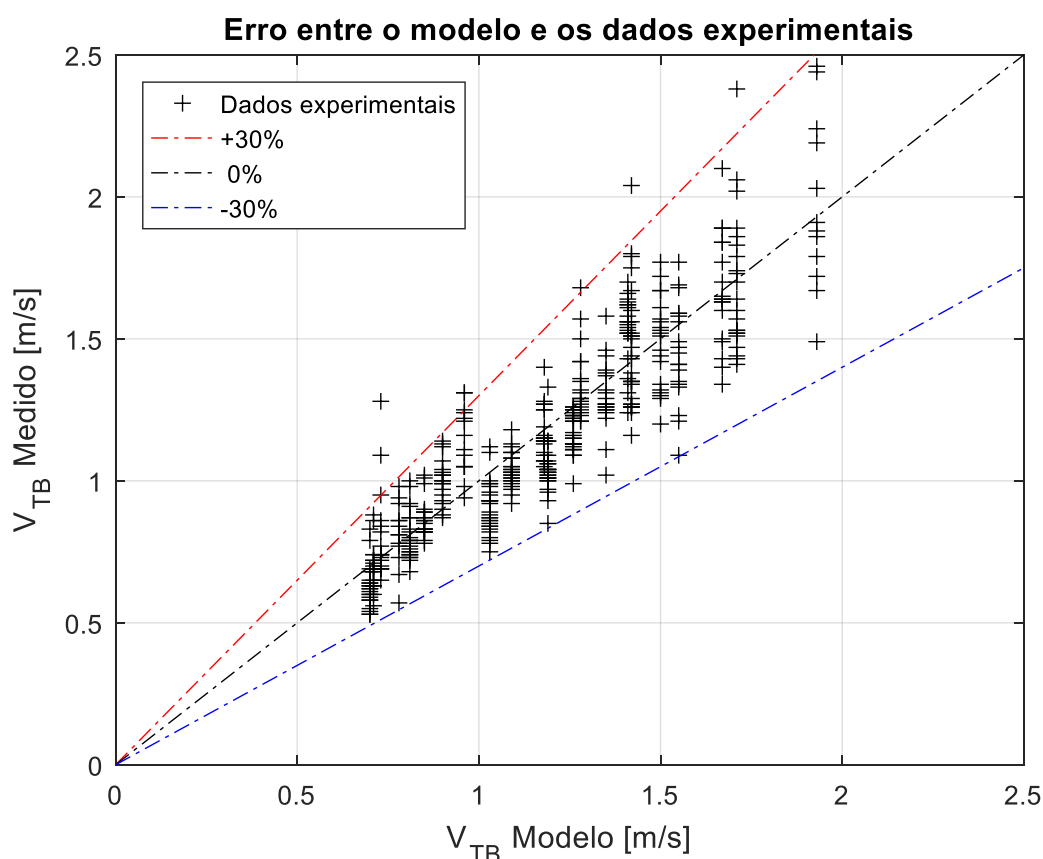
$$C_0 = 1.02 \quad (4.56)$$

$$V_{\infty TB} = 0.57 \quad (4.57)$$

O coeficiente de distribuição  $C_0$  obtido próximo à unidade revela que o arranjo experimental apresenta uma baixa razão de aspecto, tendendo à uma configuração que remonta ao escoamento turbulento entre placas paralelas, ou seja, que possui um perfil de velocidades aproximadamente uniforme (WALLIS, 1969). Assim como reportado por Mendes (2012), o fluxo de escorregamento obtido se aproxima mais do calculado pelo modelo de Hasan e Kabir (1992), o que pode ser visualizado a partir do cruzamento das retas ilustradas na Figura 4.11 com o eixo das ordenadas, porém o coeficiente da razão de aspecto para a componente

horizontal como representado pela Equação (4.55) deve ser reajustado, pois este modelo foi desenvolvido para escoamentos verticais levemente inclinados.

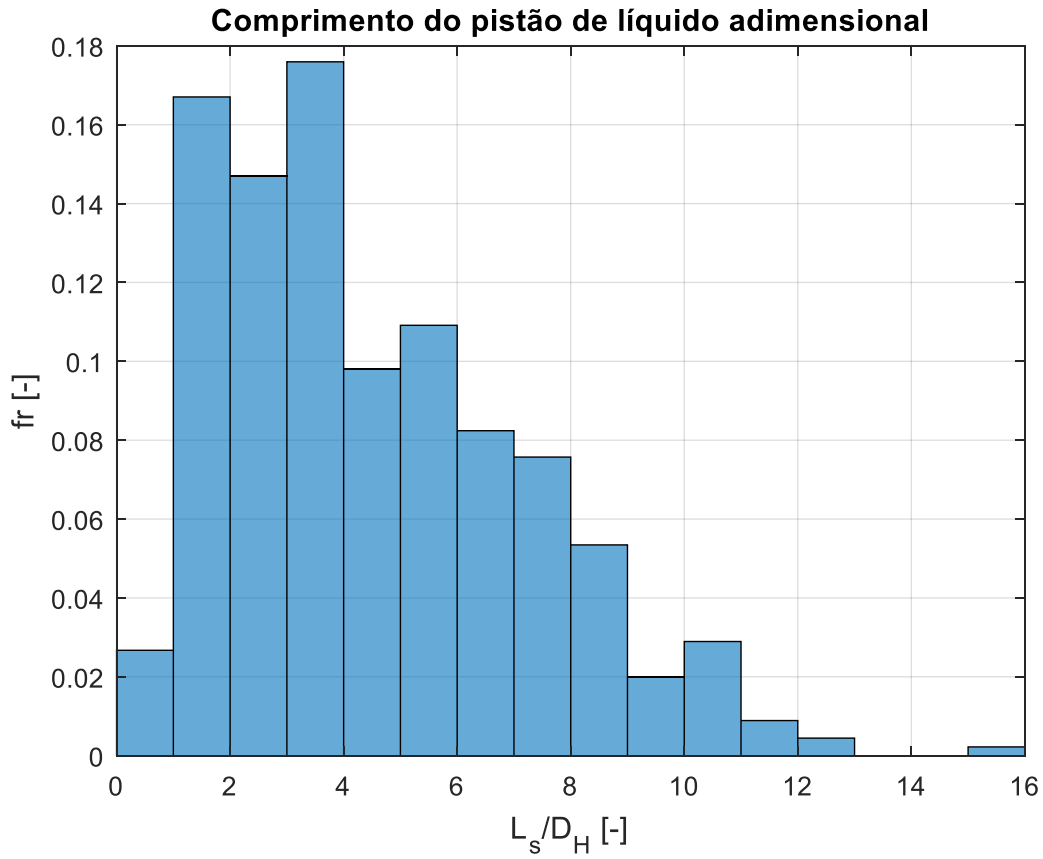
O ajuste supracitado engloba 98,7% dos dados experimentais observados com uma margem de erro de 30% como ilustrado na Figura 4.12.



**Figura 4.12** – Comparação entre os dados brutos de velocidade e o ajuste

O modelo de *Drift Flux* obtido como ilustrado na Equação (2.1) utilizando os coeficientes ajustados indicados nas Equações (4.56) e (4.57) será utilizado para a estimativa da fração de vazios *in situ* do escoamento no padrão golfadas no duto anular, este dado será importante para os estudos sobre a separação gás-líquido.

Os comprimentos dos pistões de líquido observados normalizados pelo diâmetro hidráulico equivalente foram plotados na Figura 4.13 onde obteve-se um comprimento médio de 4.54 diâmetros, contrariando o reportado por Taitel et al. (1980) e adotado por Caetano et al. (1992), como exposto durante a Revisão da Literatura na Seção 2.3.



**Figura 4.13** – Histograma do comprimento do pistão de líquido adimensional

Define-se o número de Froude para a golfada a partir da definição da frequência da célula unitária  $f_u$  dada pela Equação (2.12):

$$Fr_{slug} = f_u \sqrt{\frac{D_H}{g}} = \frac{V_{TB}}{L_U} \sqrt{\frac{D_H}{g}} \quad (4.58)$$

A partir da Equação (4.58), pode-se reescrever o modelo de Zabarás (2000) dado pela Equação (2.14) da seguinte forma (ZABARAS, 2000):

$$Fr_{slug} = k[(1 - \lambda)(Fr_{cte}^2 + Fr_m^2)]^n \quad (4.59)$$

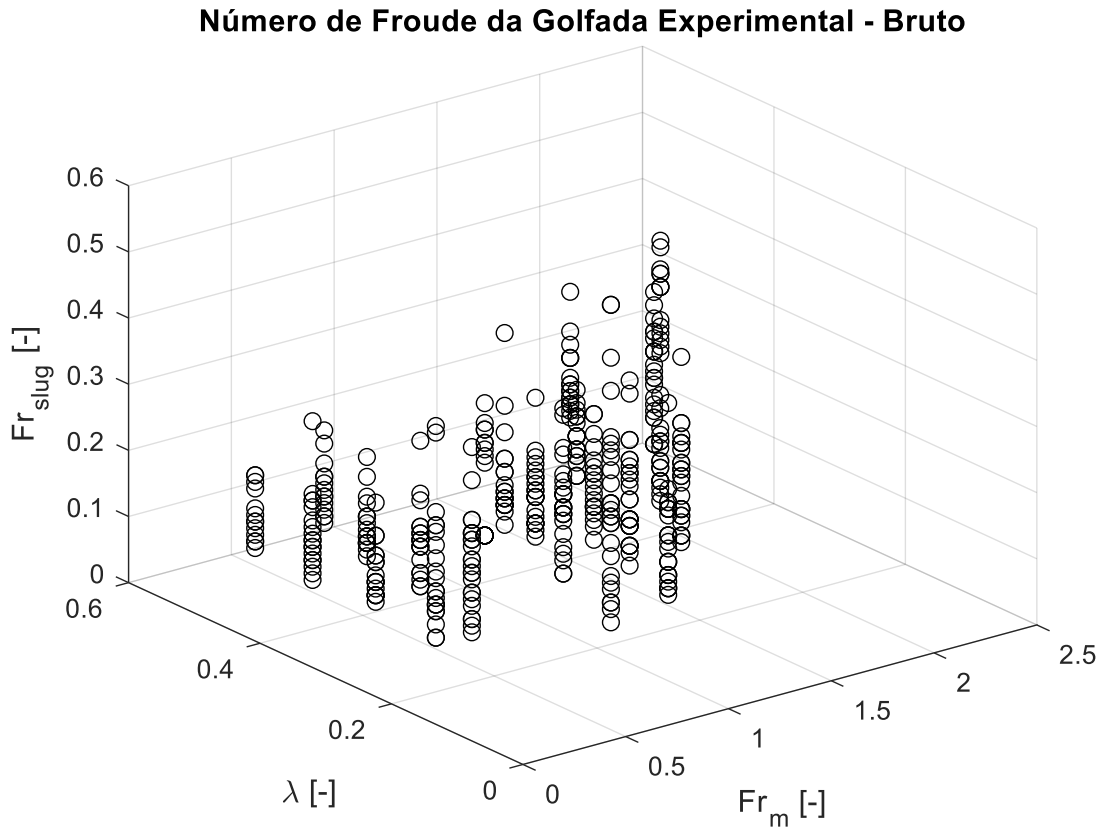
Onde:

$$k = 0.0226(0.836 + 2.75 \sin \theta^{0.25}) \sqrt{\frac{D_H}{g}} \quad (4.60)$$

$$Fr_{cte}^2 = \frac{19.75}{gD_H} \quad (4.61)$$

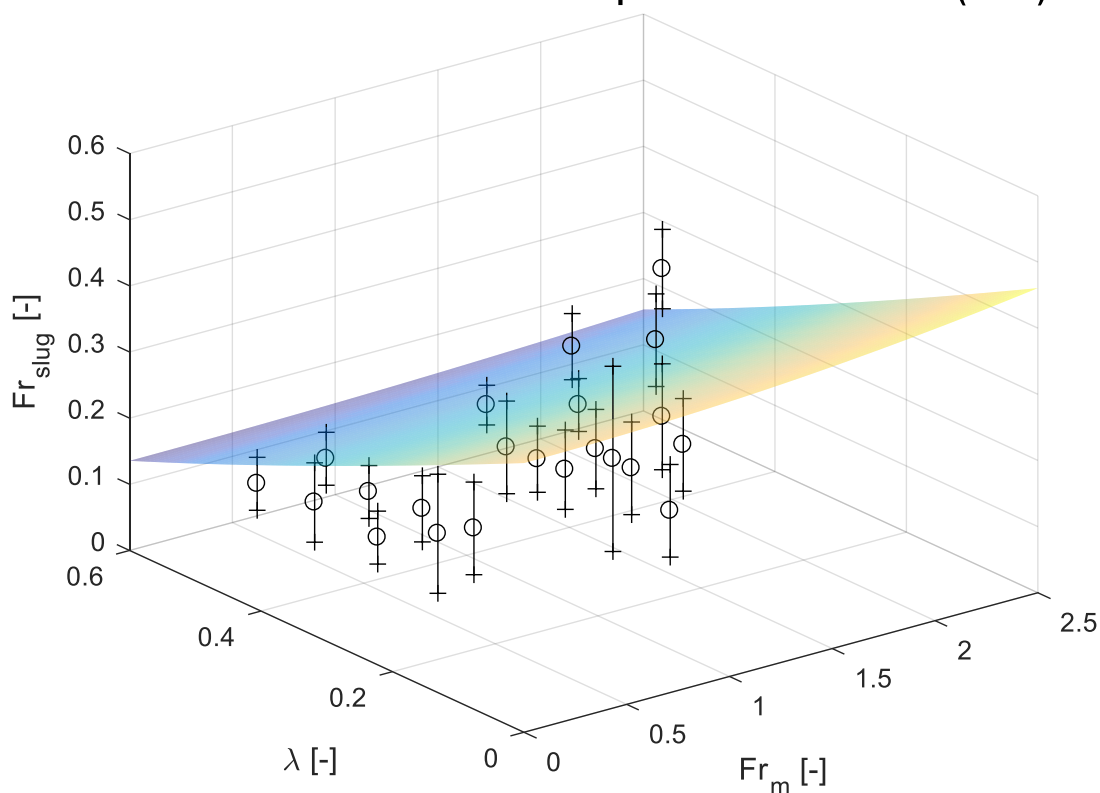
$$n = 1.2 \quad (4.62)$$

Para o arranjo experimental sob estudo, a expressão dada pela Equação (4.59) pode ser ajustada em busca de uma correlação adequada para o duto anular. Os números de Froude da golfada brutos obtidos foram plotados na Figura 4.14, como indicados pela Equação (4.58), enquanto que as médias e os desvios foram ilustrados na Figura 4.15 em comparação com a superfície equivalente ao modelo revisado de Zabaras (2000). Percebe-se que o modelo superestima as frequências observadas, o que demanda uma reanálise ajustada para o duto anular em estudo.



**Figura 4.14** – Número de Froude da golfada experimental bruto

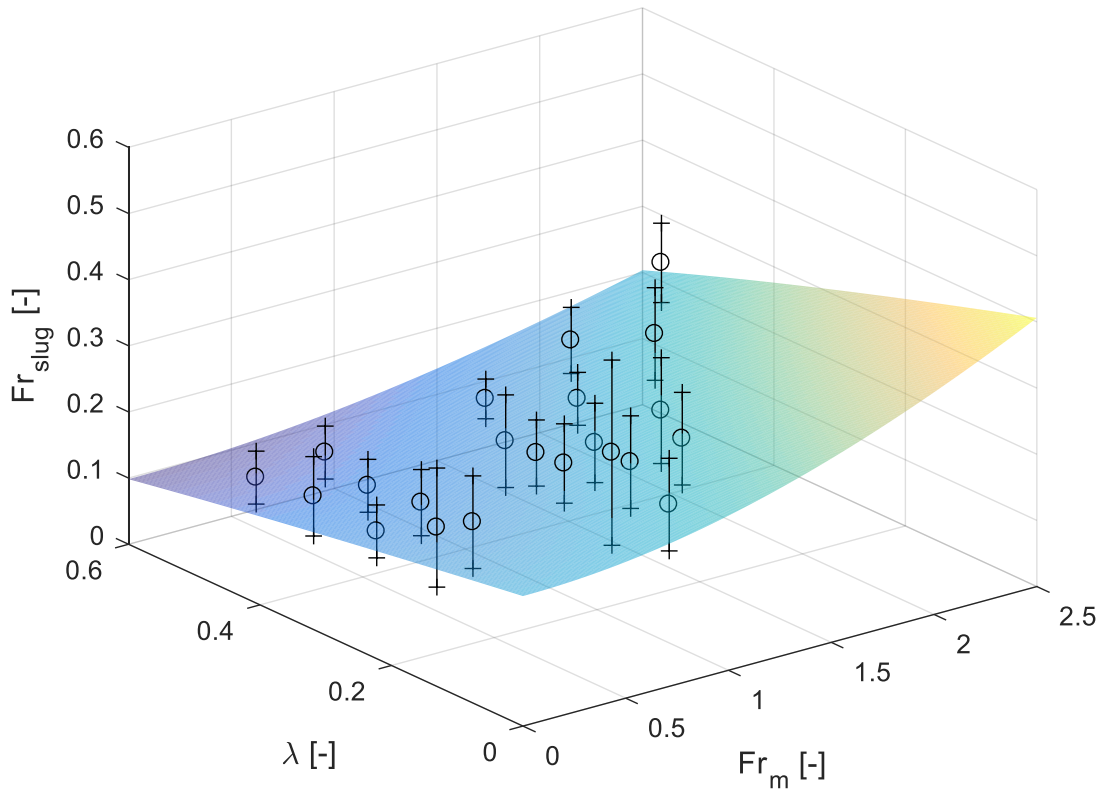
### Número de Froude da Golfada Experimental vs Zabaraz (2000)



**Figura 4.15** – Número de Froude da golfada experimental médios (pontos) comparados com Zabaraz (2000) (superfície)

Desta forma, busca-se reajustar a Equação (4.59) relativa aos modelos de Zabaraz (2000) para os dados experimentais obtidos utilizando o método dos mínimos quadrados não linear, cujos resultados foram expressos na Figura 4.16 e Equação (4.63):

**Número de Froude da Golfada Experimental - Ajuste  $R^2 = 0.77$**



**Figura 4.16** – Ajuste dos dados experimentais

$$Fr_{slug} = 0.0707[(1 - \lambda)(3.8710 + Fr_m^2)]^{0.7551} \quad (4.63)$$

A qualidade do ajuste reportado na Figura 4.16 não é satisfatória ( $R^2 = 0.77$ ), o que nos leva a rever o formato da Equação (4.59) utilizada como base para o modelo. Portanto, busca-se discutir um novo formato a partir da definição da frequência da célula unitária e do número de Froude para a golfada como ditado pelas Equações (2.12) e (4.58). A partir do modelo de *Drift Flux* e do comprimento da célula unitária normalizado pelo diâmetro hidráulico equivalente, temos:

$$Fr_{slug} \left( \frac{L_U}{D_H} \right) = \frac{V_{TB}}{\sqrt{gD_H}} = C_0 \frac{V_M}{\sqrt{gD_H}} + \frac{V_{2J}}{\sqrt{gD_H}} = C_0 Fr_m + Fr_{cte} \quad (4.64)$$

O comprimento da célula unitária é regido por modelos complexos que extrapolam o escopo deste trabalho, portanto será adotada a simplificação ditada pela Equação (4.65), onde a razão entre os comprimentos da bolha de Taylor e da célula unitária (fator de intermitência

$\beta$ ) é intuitivamente proporcional à fração de vazio do escoamento. Esta hipótese equivale a desconsiderar o filme de líquido na região da bolha de Taylor, apesar de ser demasiadamente simplificadora, ela gerou melhores resultados. Logo, o aprimoramento desta proposta será indicado como sugestão para trabalhos futuros. Portanto:

$$\beta = \frac{L_f}{L_U} \sim \lambda \quad (4.65)$$

A partir da Equação (2.13):

$$\beta = \frac{L_f}{L_U} = \frac{L_U - L_s}{L_U} = 1 - \left(\frac{L_s}{L_U}\right) \sim \lambda \Leftrightarrow \left(\frac{L_s}{L_U}\right) \sim (1 - \lambda) \quad (4.66)$$

Taitel et al. (1980) mostrou que o pistão de líquido possui um comprimento médio aproximadamente constante igual a 16 diâmetros para o duto de seção circular e Caetano et al. (1992) sugere que para o duto anular na vertical seja usado o diâmetro hidráulico equivalente. Apesar de termos observado valores diferentes para o duto anular horizontal levemente inclinado como reportado na Figura 4.13, pode-se propor que tal relação média seja uma constante, assim como feito por Taitel et al. (1980) (CAETANO; SHOHAM; BRILL, 1992a; TAITEL; BARNEA; DUKLER, 1980):

$$\left(\frac{L_s}{D_H}\right) = k_d \quad (4.67)$$

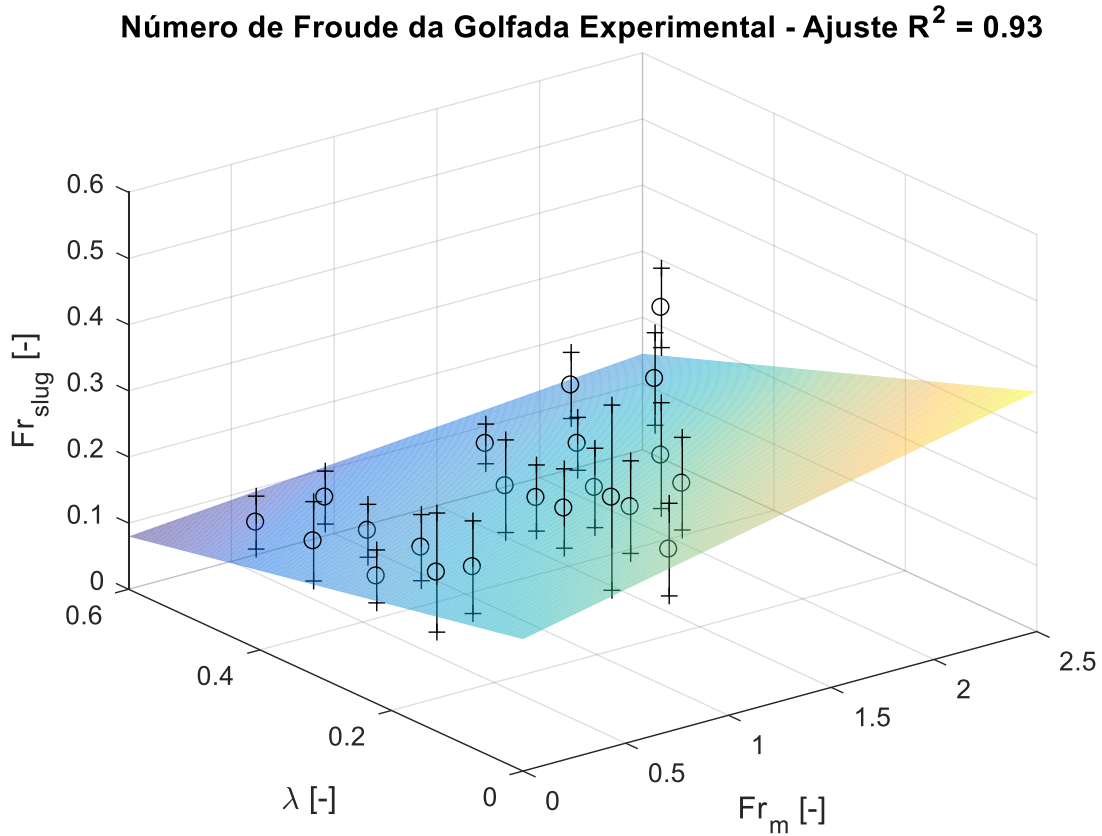
Substituindo a Equação (4.67) na (4.66) temos:

$$\left(\frac{L_s}{L_U}\right) = \left(\frac{k_d D_H}{L_U}\right) \sim (1 - \lambda) \Leftrightarrow \left(\frac{L_U}{D_H}\right) \sim \frac{k_d}{(1 - \lambda)} \quad (4.68)$$

Substituindo a Equação (4.68) na (4.64):

$$Fr_{slug} = \frac{1}{k_d} (1 - \lambda) (C_0 Fr_m + Fr_{cte}) \quad (4.69)$$

A expressão dada pela Equação (4.69) possui um formato interessante pois para um meio estacionário, teríamos um número de Froude da mistura  $Fr_m$  nulo, portanto  $Fr_{cte}$  representa o número de Froude da ascensão de uma bolha de Taylor isolada em um meio estacionário, já que para o caso de uma bolha isolada, a fração de vazios tende a zero. Repetese o processo de ajuste a partir da Equação (4.69) utilizando o método dos mínimos quadrados não linear obtendo-se um resultado superior ( $R^2 = 0.93$ ) indicado na Equação (4.70):



**Figura 4.17** – Ajuste dos dados experimentais

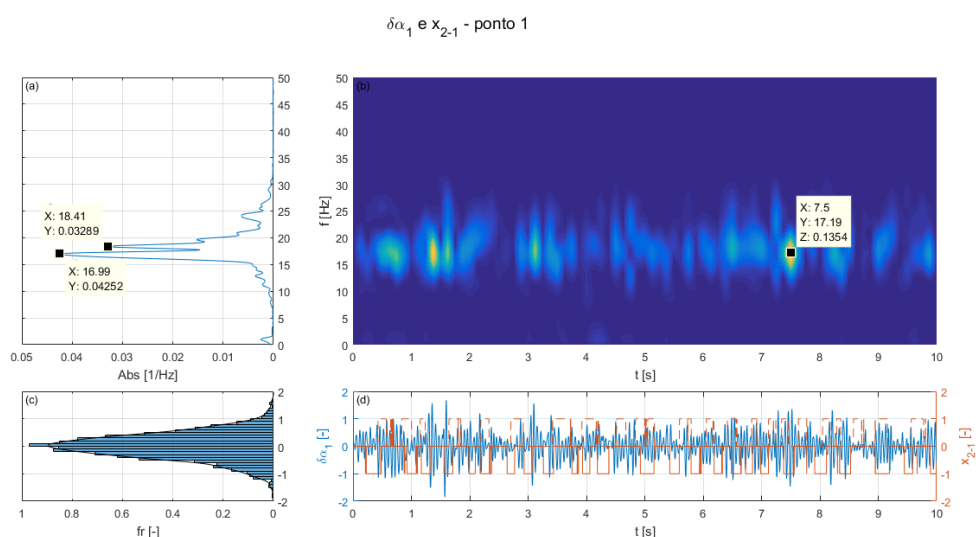
$$Fr_{slug} = 0.0654(1 - \lambda)(Fr_m + 3.0499) \quad (4.70)$$

As séries de pressão diferencial obtidas foram analisadas para os 10 primeiros pontos da matriz de testes, onde observou-se que a bolha de Taylor se manteve com aspecto similar e regular durante a passagem pelas 3 tomadas de pressão das duas sondas de pressão diferencial utilizadas. Esta restrição foi necessária para a comparação destes sinais com as funções indicadoras de fase obtidas, pois estes foram os cenários onde o algoritmo de estimativa destas obteve melhores resultados, o que permite averiguar a relação sob estudo entre as ondas

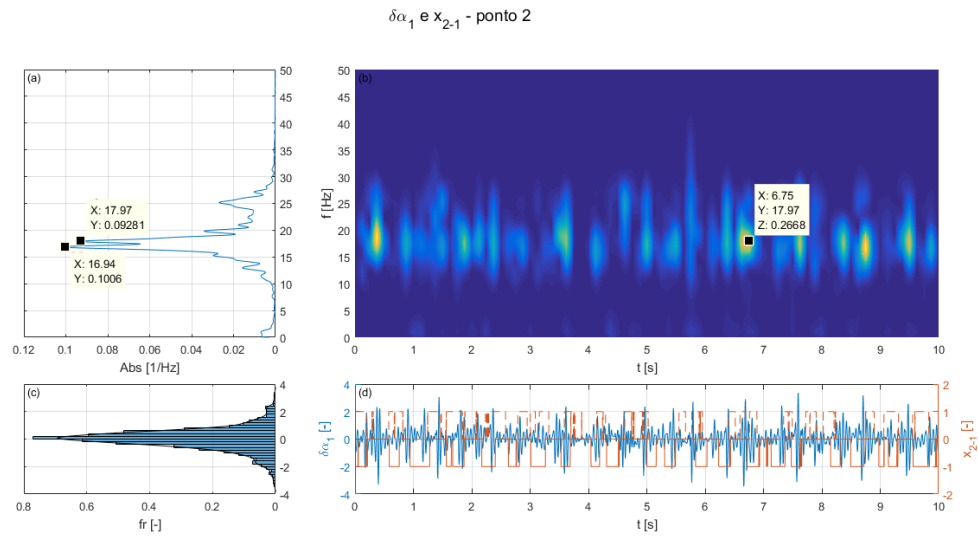


de fração de vazio observadas através do processamento de imagens e as oscilações na pressão diferencial medidas. Esta comparação somente foi possível pois os dados foram adquiridos em sincronia com os vídeos adquiridos pela câmera de alta velocidade.

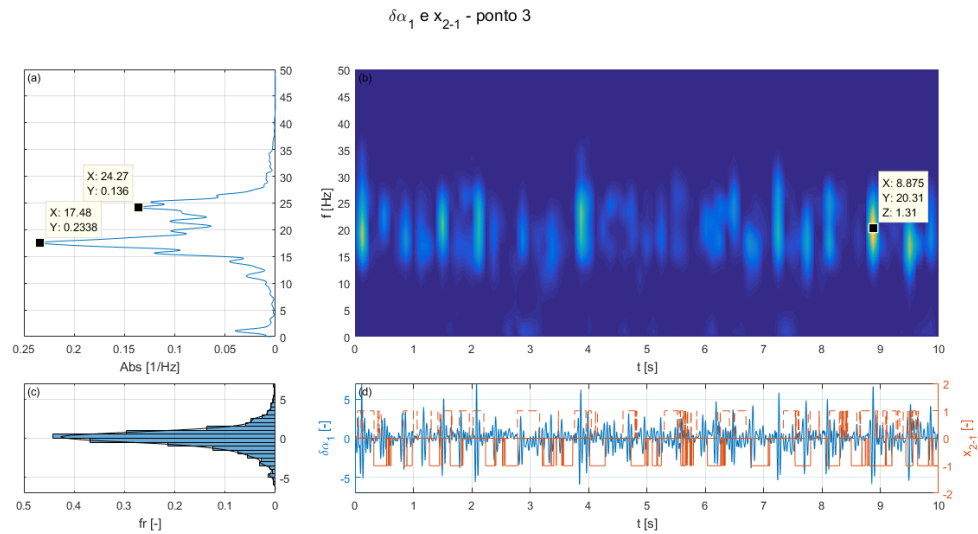
Os sinais de pressão diferencial foram normalizados como indicado pela Equação (4.49) visando compará-los com as funções indicadoras de fase estimadas a partir do processamento de imagens. Estas foram plotadas em linhas tracejadas com valores positivos para a segunda tomada de pressão e em linhas sólidas com valores negativos para a primeira tomada de pressão. A partir destas séries temporais, calcularam-se as densidades espectrais de potência, os histogramas e espectrogramas (APÊNDICE B.1) como indicados nas figuras a seguir.



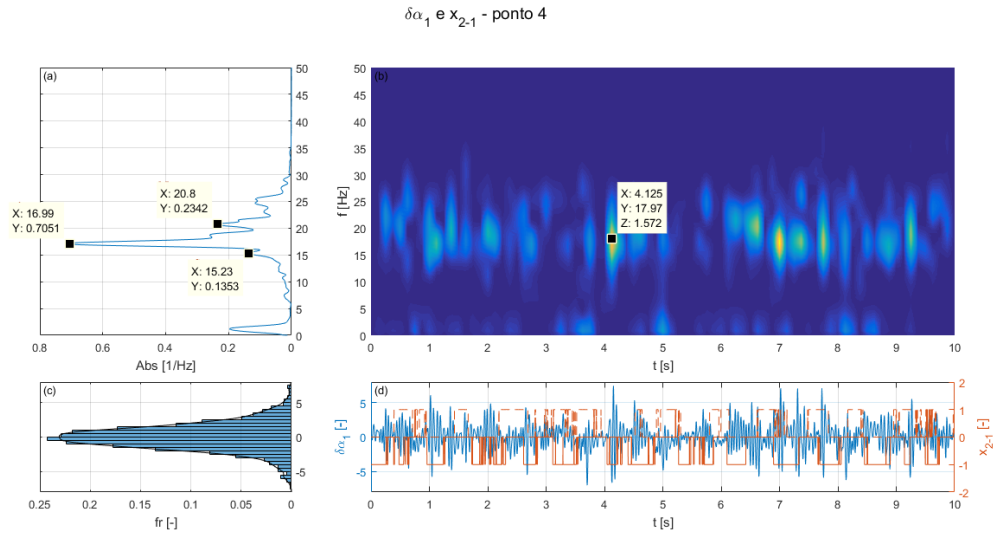
**Figura 4.18** – Ponto 1 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



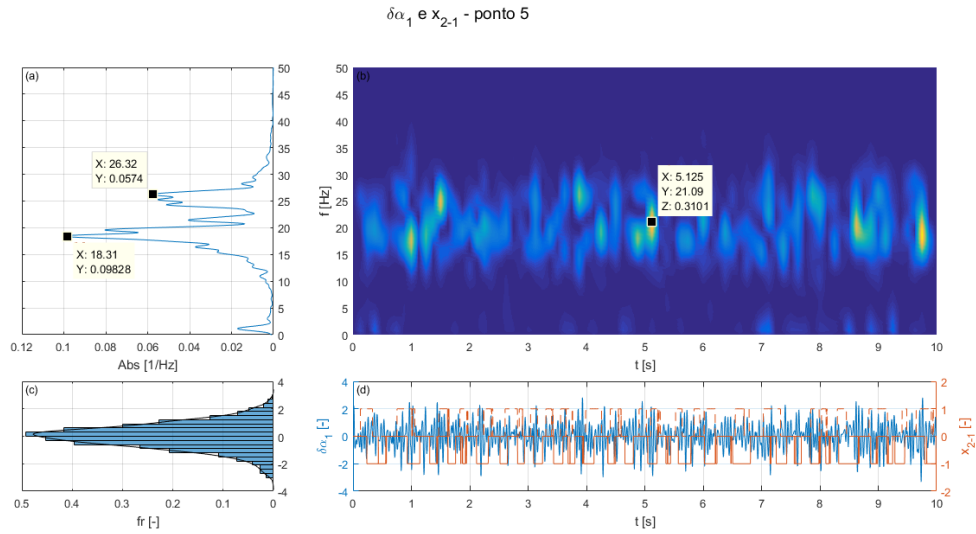
**Figura 4.19** – Ponto 2 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



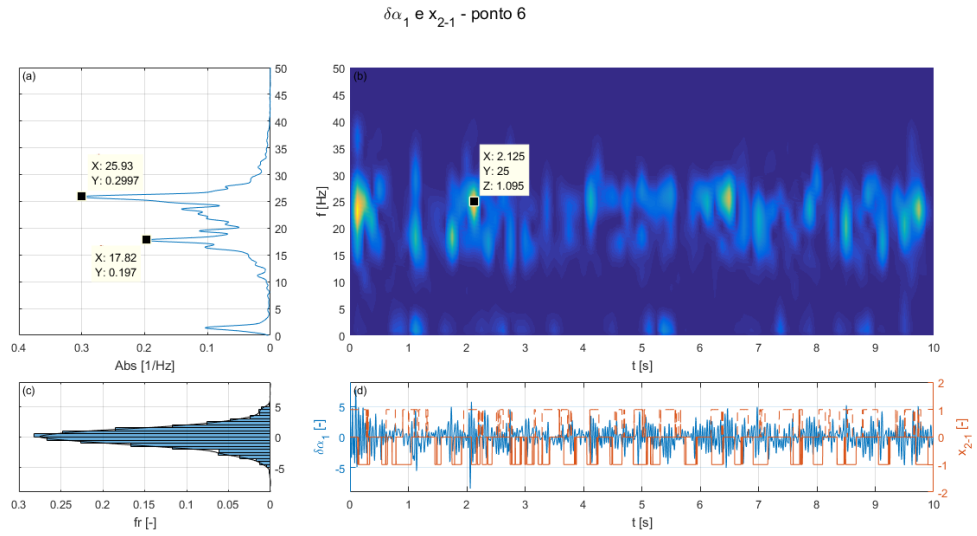
**Figura 4.20** – Ponto 3 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



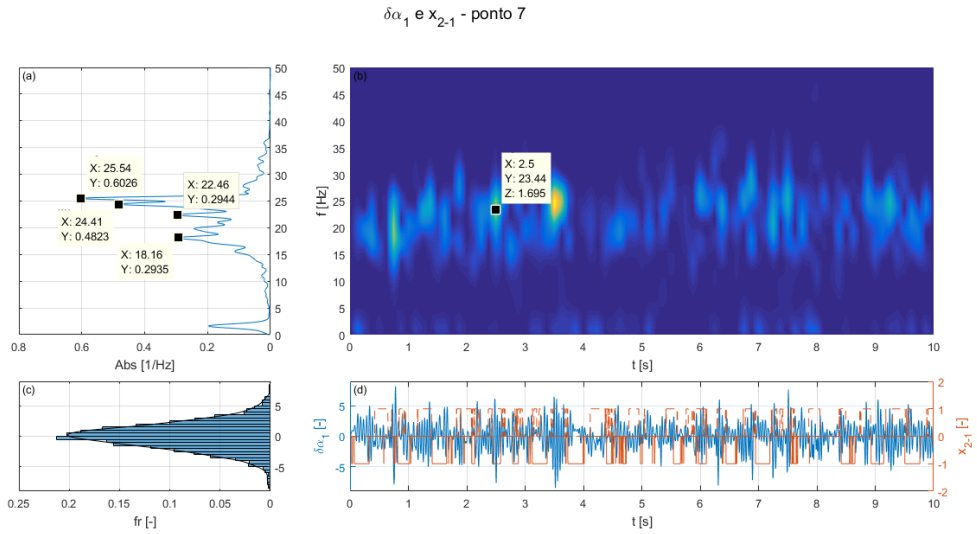
**Figura 4.21** – Ponto 4 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



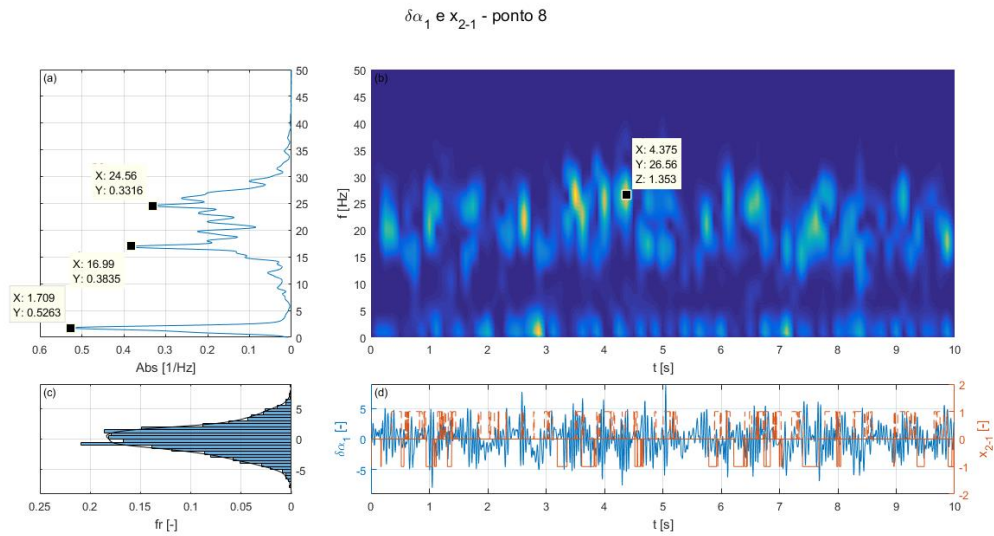
**Figura 4.22** – Ponto 5 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



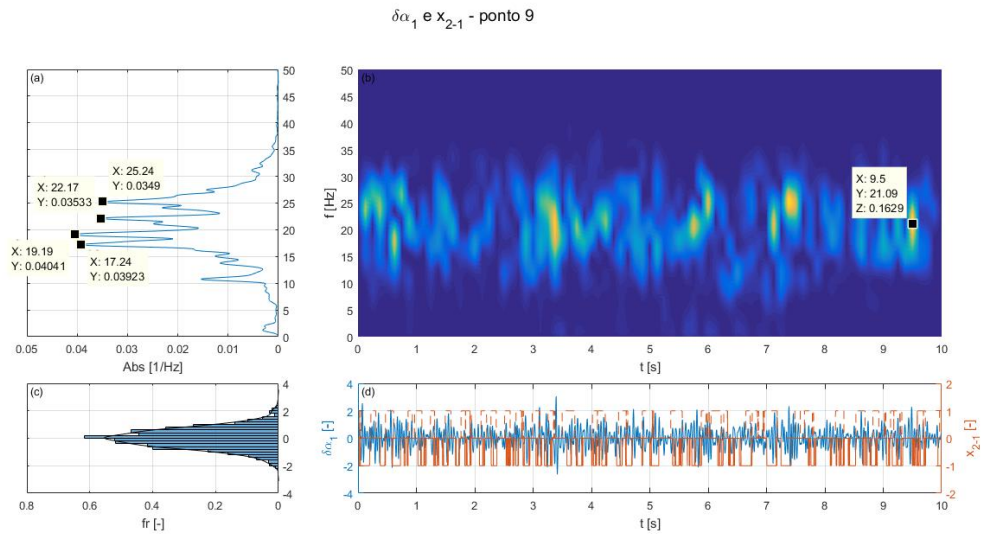
**Figura 4.23** – Ponto 6 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



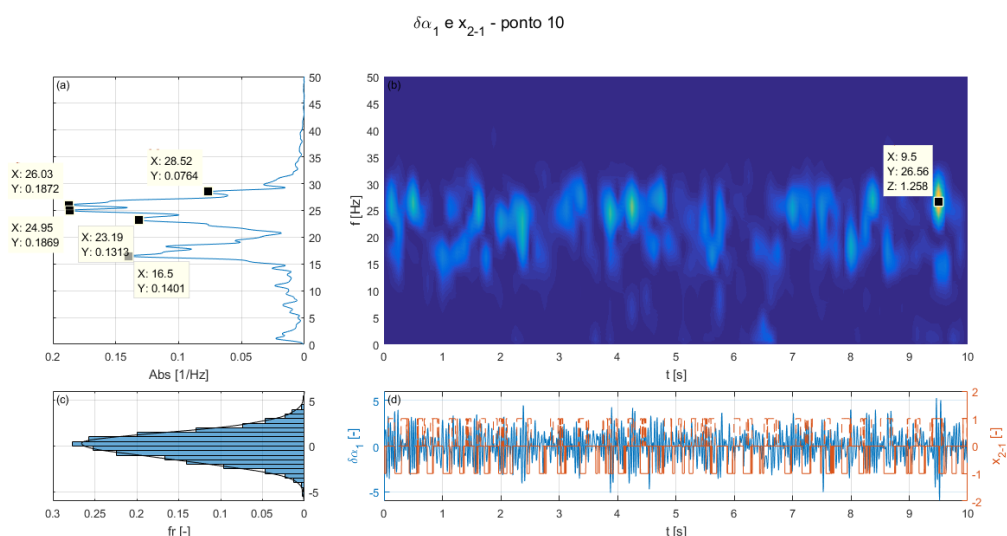
**Figura 4.24** – Ponto 7 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



**Figura 4.25** – Ponto 8 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)

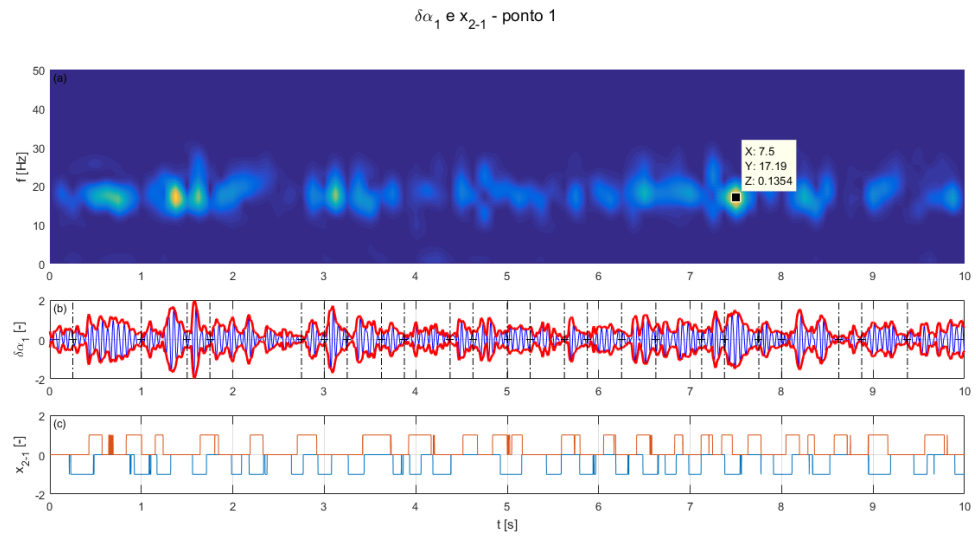


**Figura 4.26** – Ponto 9 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)

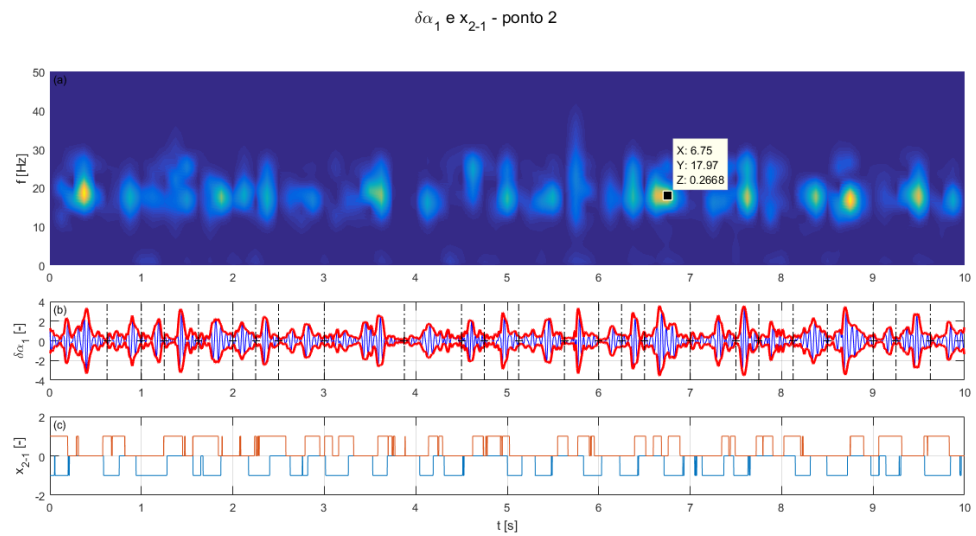


**Figura 4.27** – Ponto 10 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) PSD (b) Espectrograma (c) Histograma (d) Série de pressão diferencial normalizada e funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)

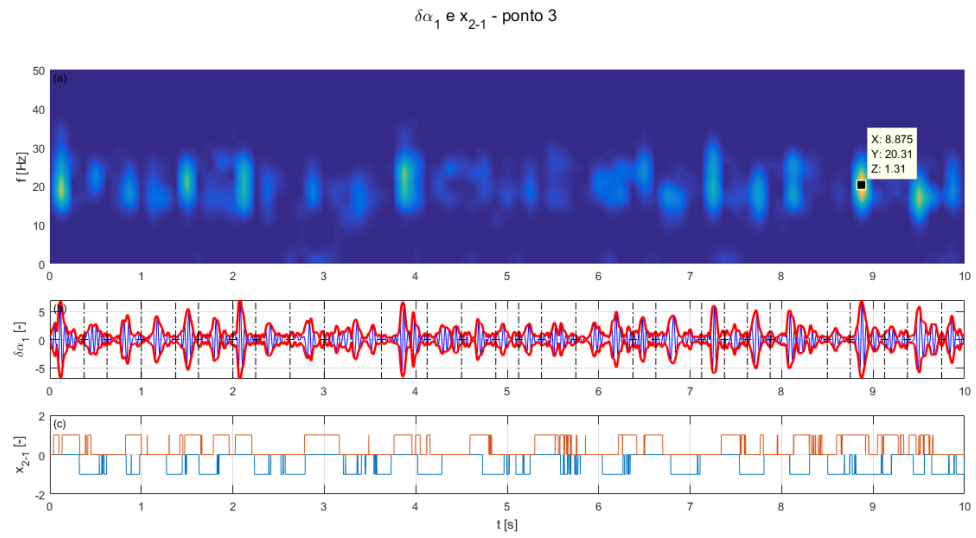
Da análise da Figura 4.18 à Figura 4.27, conclui-se que, de um modo geral, as séries temporais podem ser modeladas por um processo gaussiano, pois os sinais possuem distribuições marginais normais. Este resultado é importante porque permite utilizar uma série de técnicas estatísticas, sendo a SSA a principal sugestão como uma alternativa para decompor o sinal em autofunções separando uma componente puramente estocástica estatisticamente independente das demais, deixado como sugestão de trabalho futuro (GROTH; GHIL, 2015). As PSD's apresentam picos distribuídos entorno de uma frequência central o que explica a forma do sinal modulado por amplitude sob uma onda carreadora, similar a um sinal AM (*Amplitude Modulation*) (ARRUDA; HUALLPA, 2008). A partir da análise dos espectrogramas, percebe-se o caráter não estacionário no tempo destes sinais devido à presença de picos de energia alternados entorno da frequência central como era esperado para o padrão intermitente. O caráter pulsado destes picos deve-se à passagem das células unitárias o que pode ser verificado a partir da comparação da série de pressão diferencial normalizada com as funções indicadoras de fase levantadas, esta relação pode ser visualizada com maior facilidade a partir da comparação das funções indicadoras de fase com o envelope dos sinais de pressão diferencial normalizados obtidos através da transformada de Hilbert (APÊNDICE B.2), como será feito nas figuras a seguir (ARRUDA; HUALLPA, 2008).



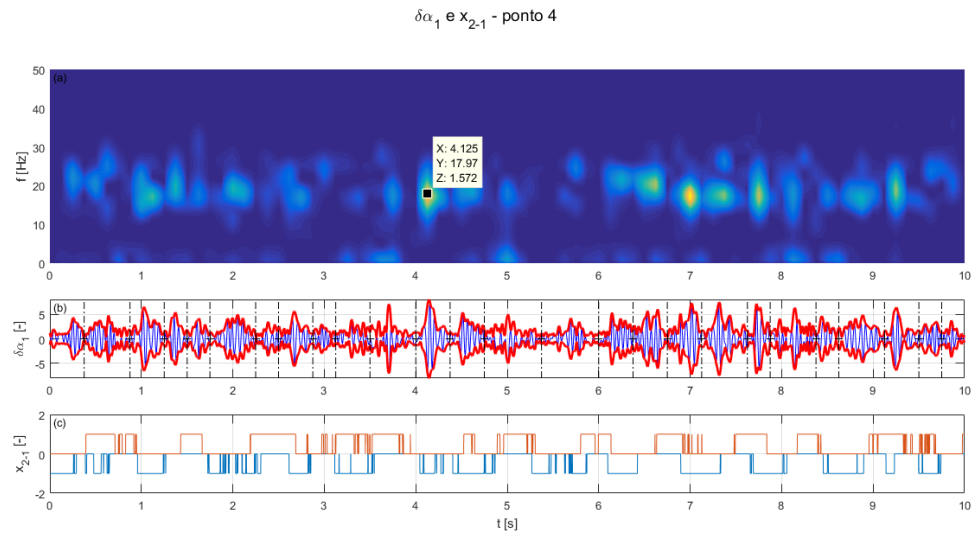
**Figura 4.28** – Ponto 1 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



**Figura 4.29** – Ponto 2 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)

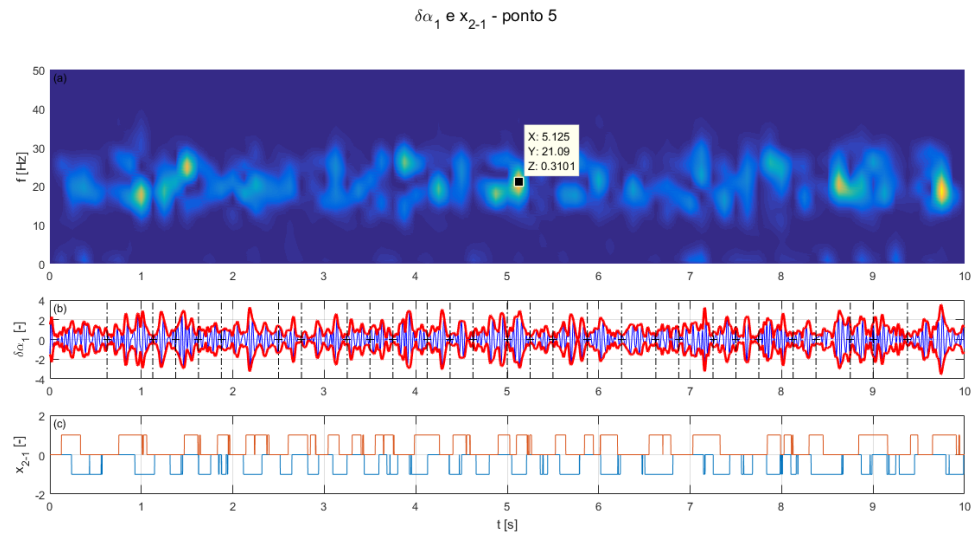


**Figura 4.30** – Ponto 3 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)

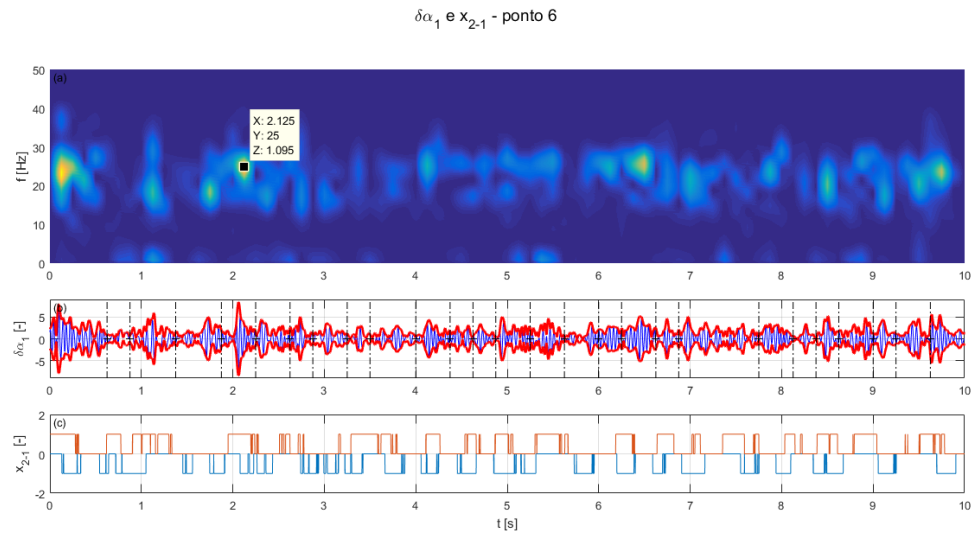


**Figura 4.31** – Ponto 4 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)

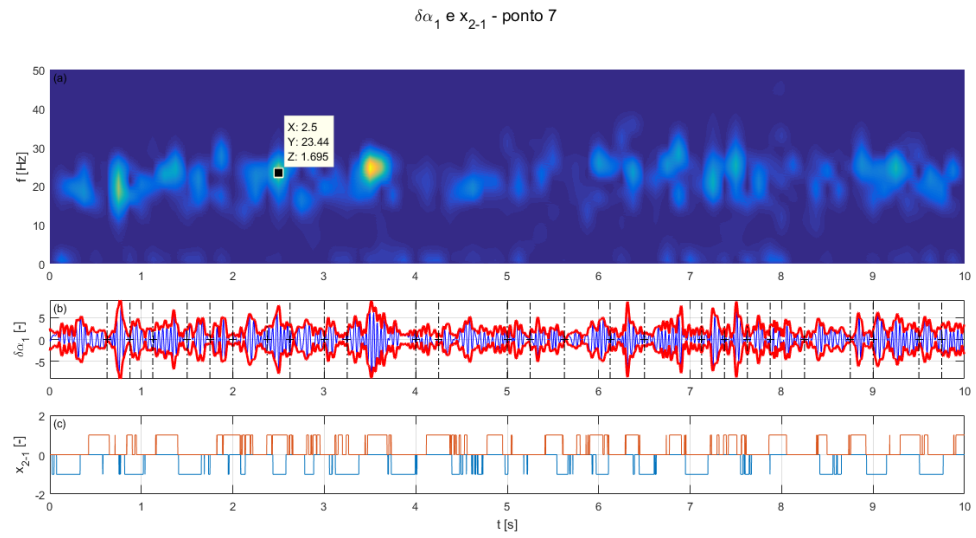




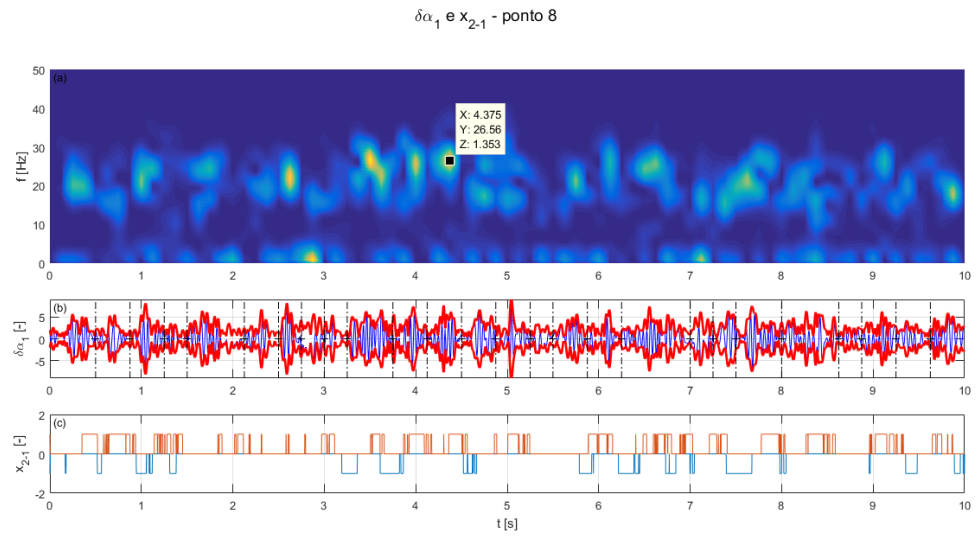
**Figura 4.32** – Ponto 5 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



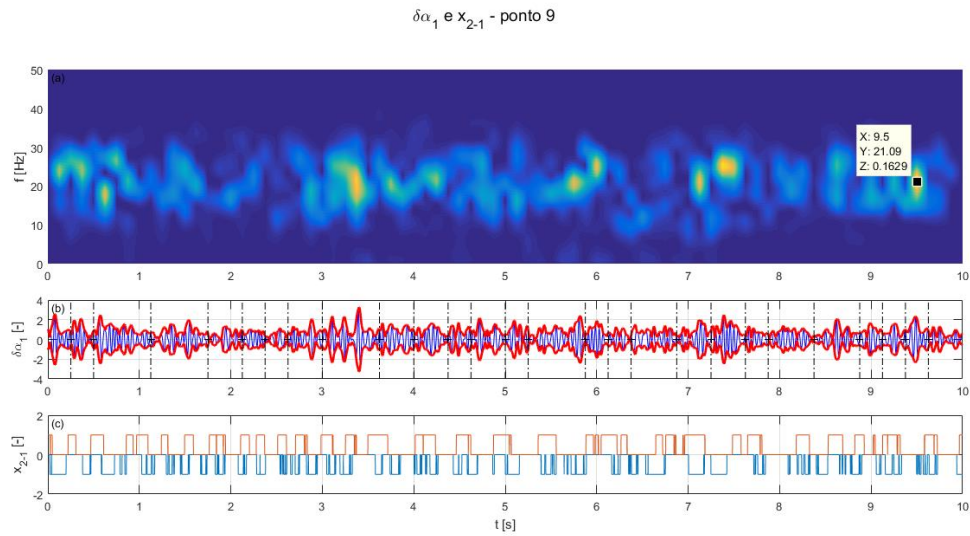
**Figura 4.33** – Ponto 6 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



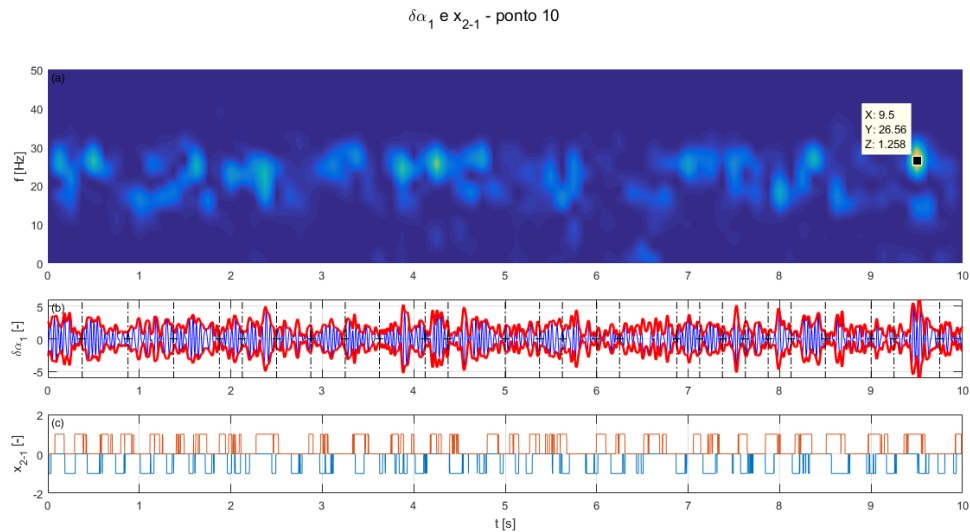
**Figura 4.34** – Ponto 7 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



**Figura 4.35** – Ponto 8 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



**Figura 4.36** – Ponto 9 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)



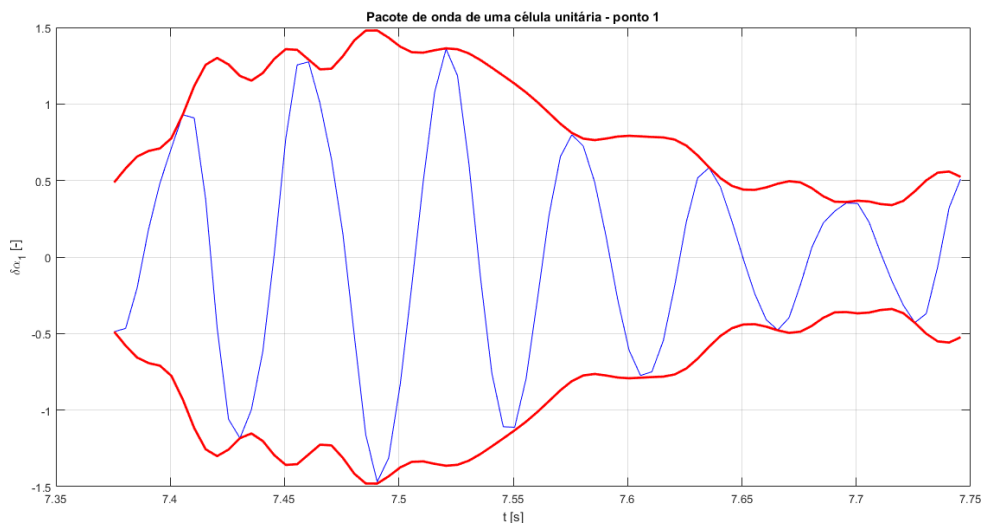
**Figura 4.37** – Ponto 10 da matriz de testes (Tabela 4.1): (a) Espectrograma (b) Série de pressão diferencial normalizada e envelope (c) Funções indicadoras de fase das portas 2 (positiva) e 1 (negativa)

A partir da análise dos resultados expressos da Figura 4.28 à Figura 4.37, em especial a comparação entre os envelopes das oscilações normalizadas da pressão diferencial com as funções indicadoras de fase estimadas permite confirmar que a passagem da célula unitária é sentida pela elevação da amplitude do envelope. Porém, esta relação não é direta, pois aparentemente há um atraso e atenuação de determinados números de onda o que suaviza a

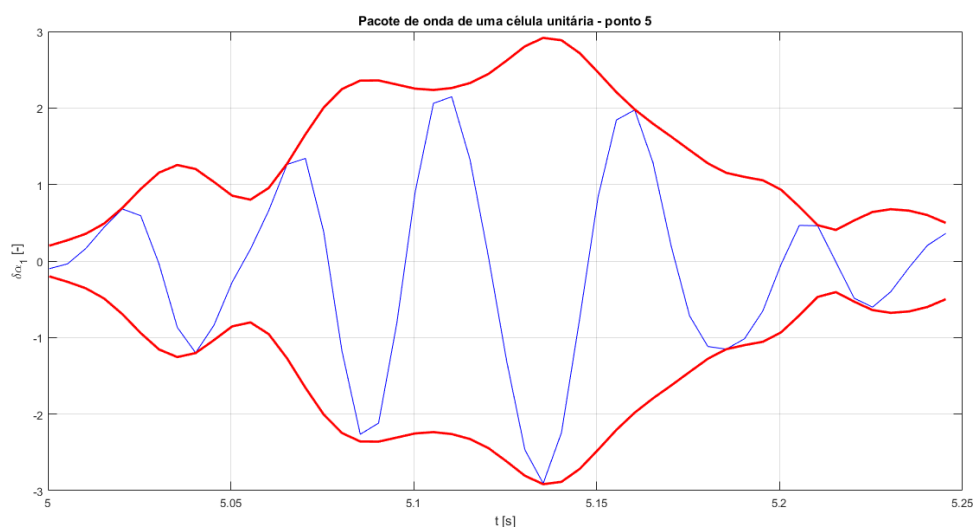
forma de onda. Isto é esperado dada a modelagem de propagação de ondas realizada no APÊNDICE A na Equação (A.40) que se trata de uma função de resposta em frequência (FRF) entre as ondas de pressão e fração de vazios onde o ganho e a fase dependem das condições do escoamento. A quantificação deste processo não faz parte do escopo deste trabalho e será deixada como sugestão para trabalhos futuros.

Outra observação importante pode ser obtida a partir da análise da função indicadora de fase, onde a duração dos pulsos possui uma variabilidade. Isso indica que os comprimentos da célula unitária variam com um comportamento estocástico, argumento reforçado pelos resultados para o comprimento do pistão de líquido expresso na Figura 4.13. Em virtude disso, talvez uma onda quadrada periódica com comprimentos constantes não seja a melhor abordagem para a modelagem deste sinal e sim um sinal telegráfico ou um processo telegráfico (PAPOULIS, ATHANASIOS; PILLAI, 2002), cuja descrição foge o escopo deste trabalho, deixando como sugestão para trabalhos futuros.

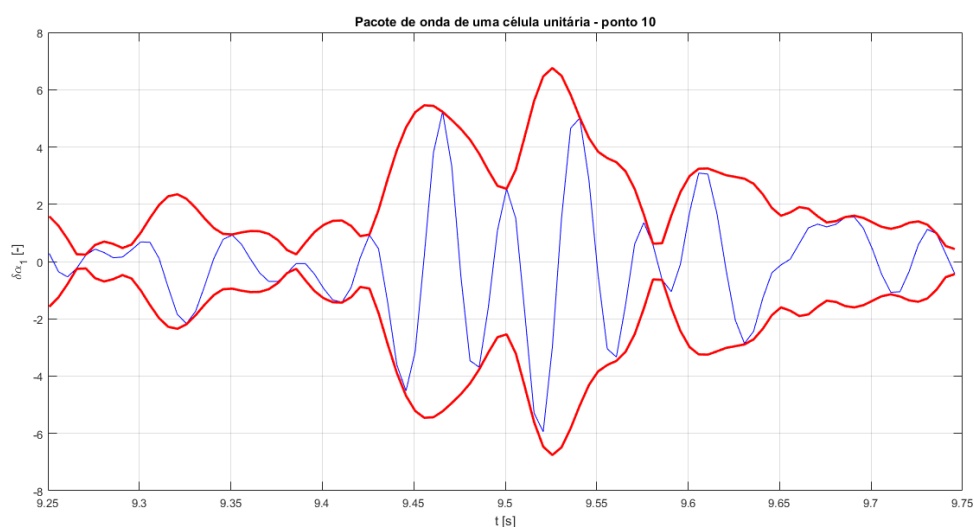
Isolou-se um trecho do sinal normalizado de pressão diferencial relativo à somente um pico de energia do espectrograma (indicado com o marcador de dados da Figura 4.28 à Figura 4.37) visando analisar a morfologia de um pacote de onda relativo à passagem de uma célula unitária isolada.



**Figura 4.38** – Ponto 1 da matriz de testes (Tabela 4.1): pacote de onda relativo à passagem de uma célula unitária



**Figura 4.39** – Ponto 5 da matriz de testes (Tabela 4.1): pacote de onda relativo à passagem de uma célula unitária

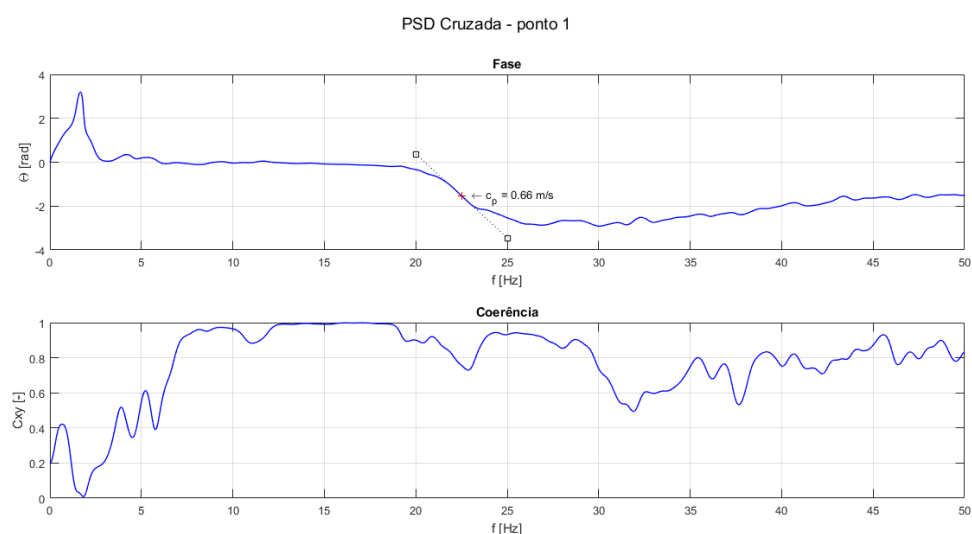


**Figura 4.40** – Ponto 10 da matriz de testes (Tabela 4.1): pacote de onda relativo à passagem de uma célula unitária

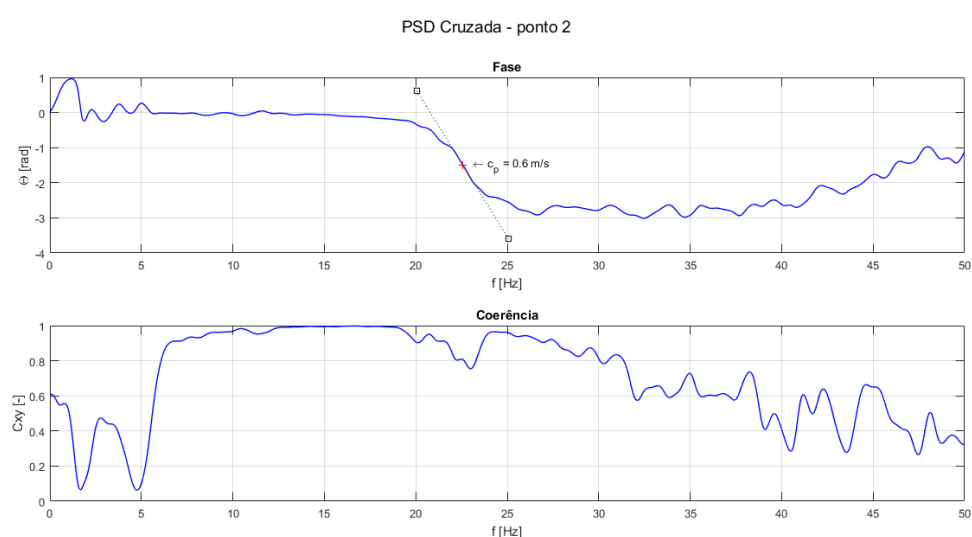
Da análise da Figura 4.38 à Figura 4.40 percebe-se que, apesar do sinal aparentar ser modulado por amplitude, ainda resta discutir se a frequência carreadora é uma constante ou varia com o tempo, o que pode ser feito a partir da estimativa das frequências instantâneas através da transformada de Hilbert (ARRUDA; HUALLPA, 2008), porém fora do escopo deste trabalho, deixando como sugestão para trabalhos futuros. As formas de onda indicadas se assemelham à uma exponencial complexa modulada por uma gaussiana, funções que constituem as bases para as *Wavelets* de Morse, Morlet e Gabor, portanto, sugere-se que as

análises tempo-frequência indicadas como trabalhos futuros utilizem essas funções como base. Além disso, percebe-se que houve superposição de mais de uma célula unitária na mesma amostra do sinal, isso deve-se à baixa resolução temporal do espectrograma.

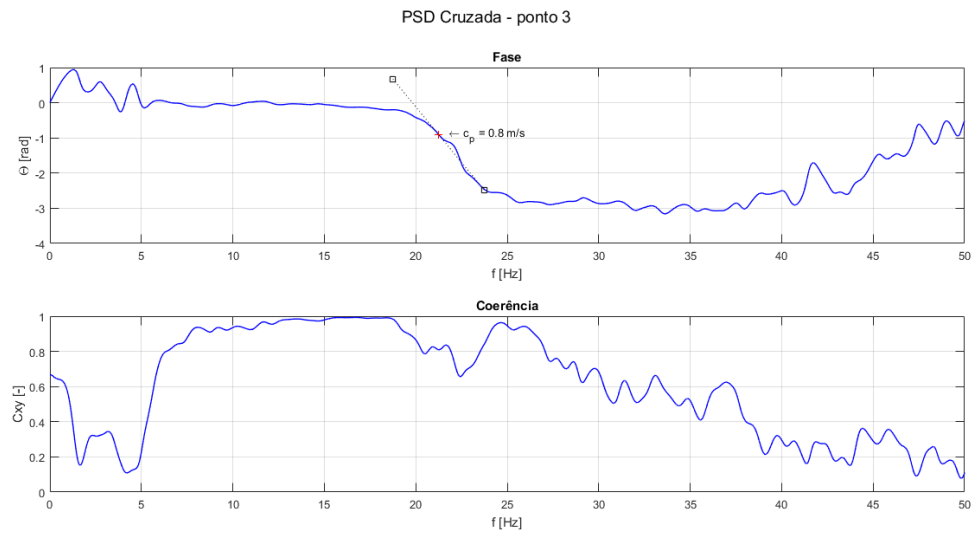
Ao analisar a fase do espectro cruzado a partir das técnicas descritas no APÊNDICE B é possível identificar a banda de frequência equivalente às velocidades da onda cinemática, calculada pela inclinação da curva de fase como indicado pela Equação (B.31).



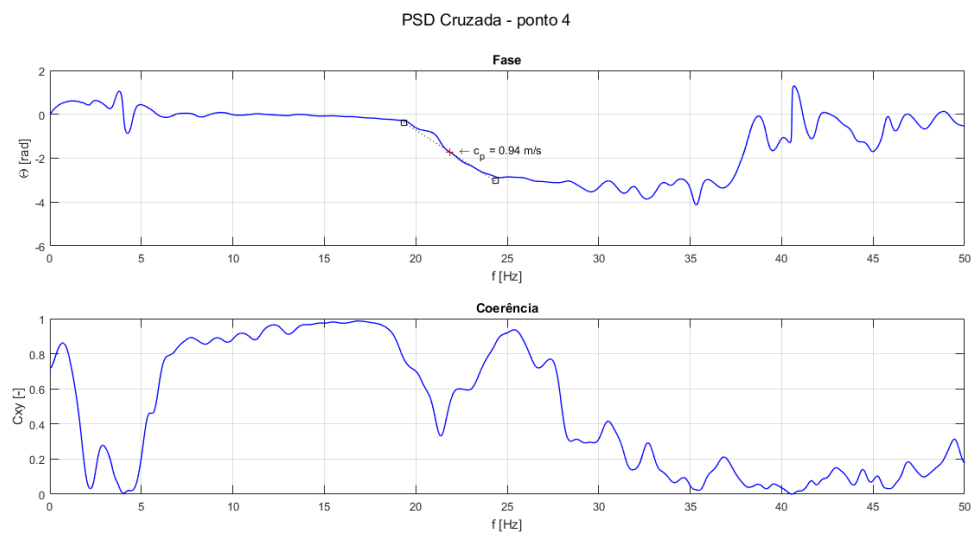
**Figura 4.41** – Ponto 1 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados



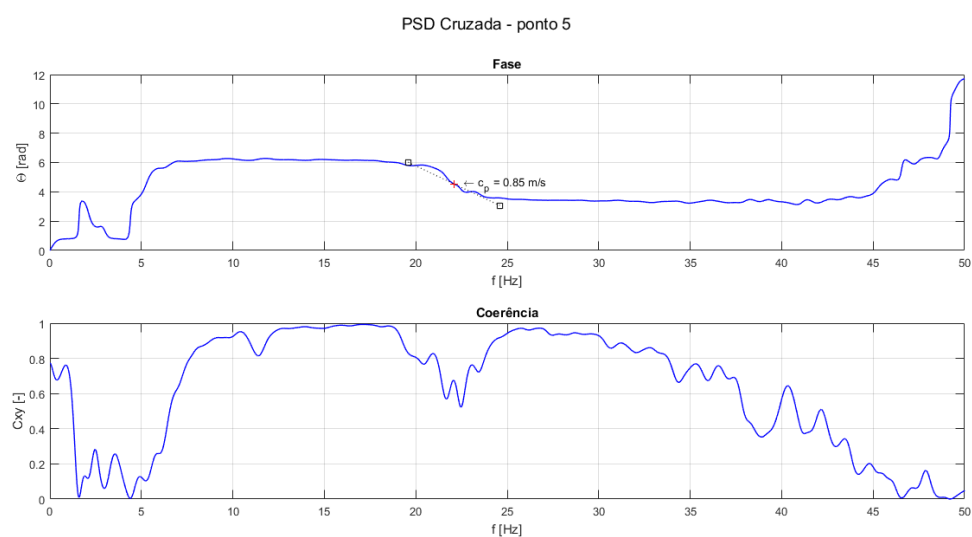
**Figura 4.42** – Ponto 2 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados



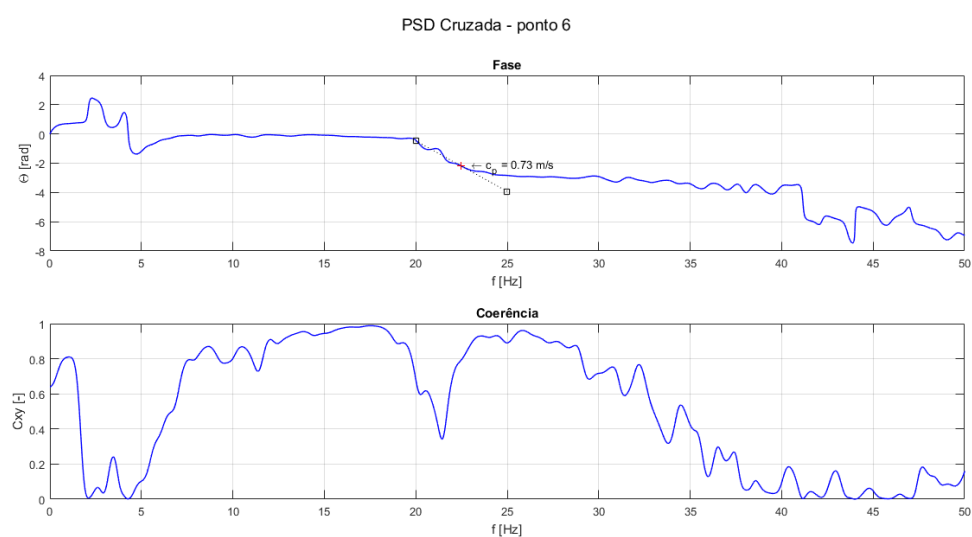
**Figura 4.43** – Ponto 3 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados



**Figura 4.44** – Ponto 4 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados

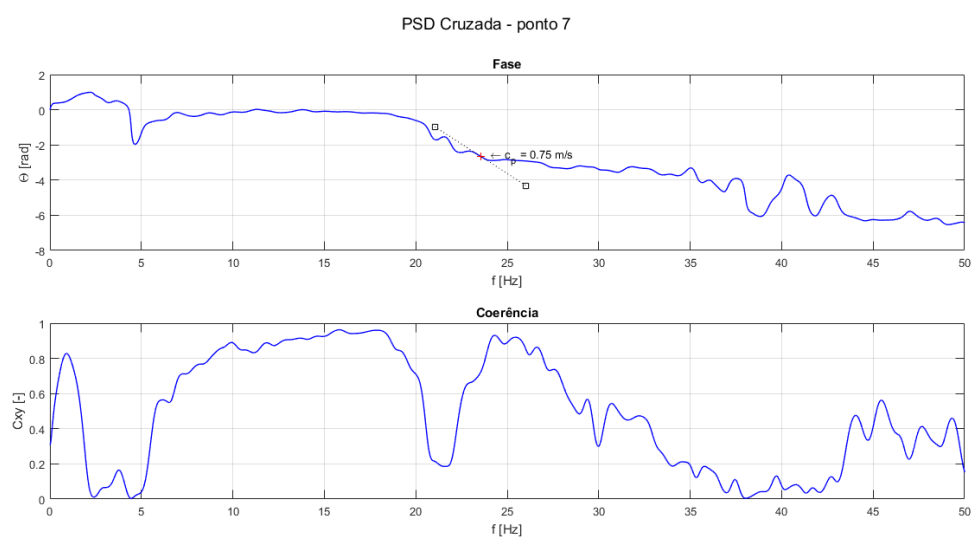


**Figura 4.45** – Ponto 5 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados

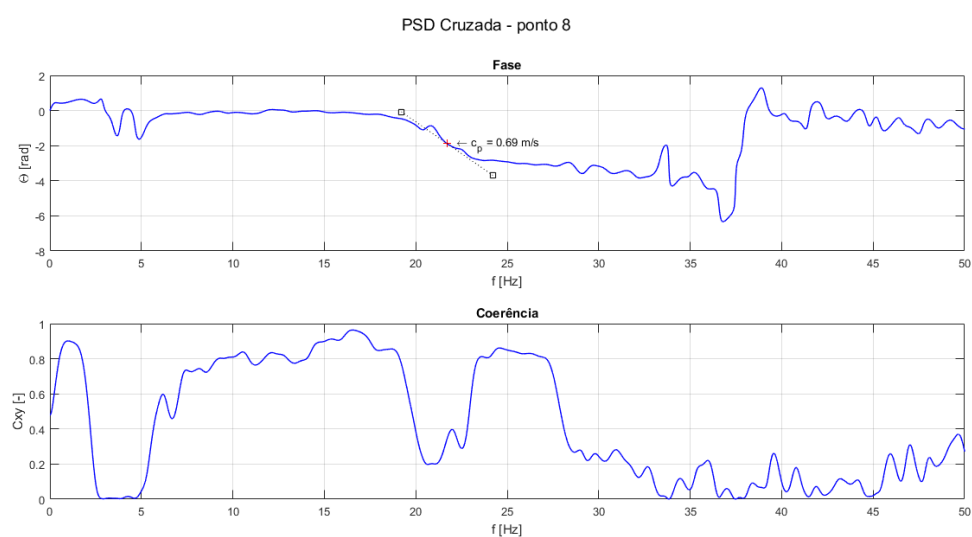


**Figura 4.46** – Ponto 6 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados

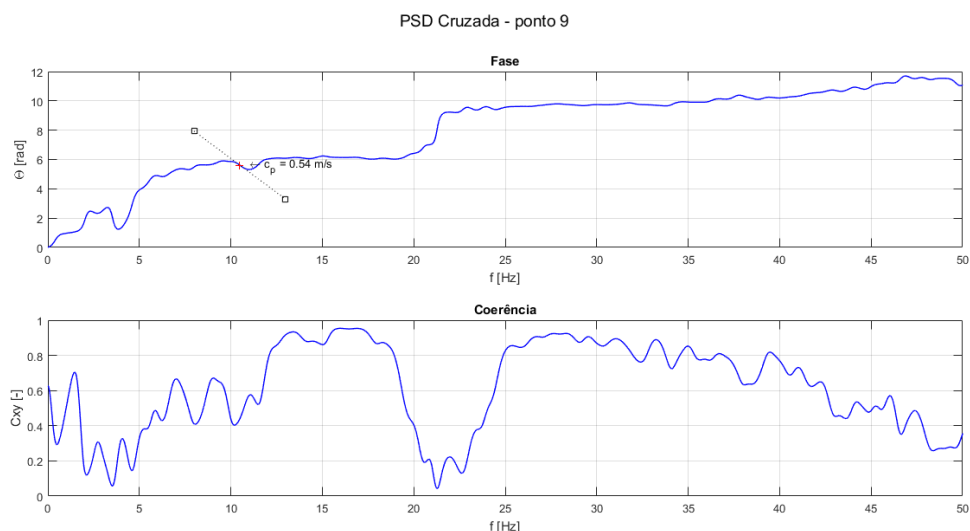




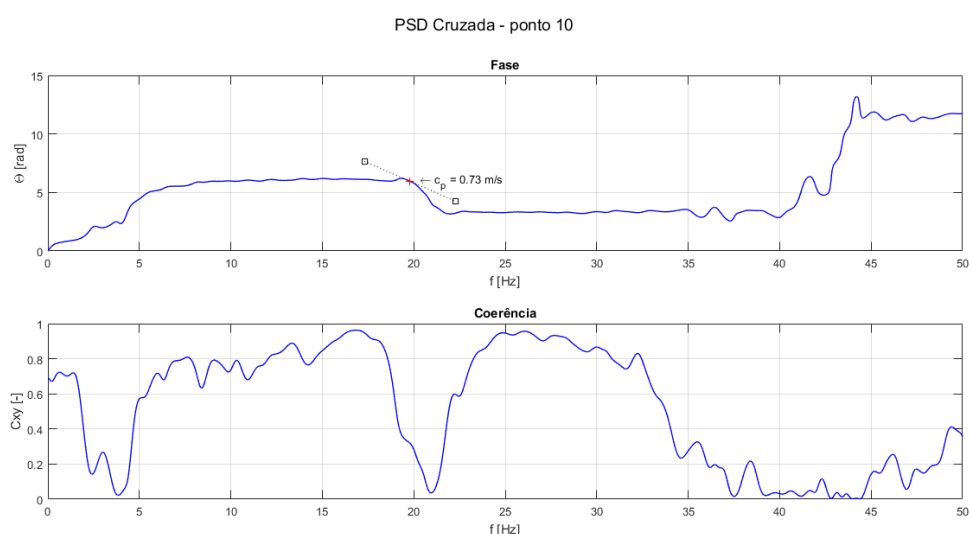
**Figura 4.47** – Ponto 7 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados



**Figura 4.48** – Ponto 8 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados



**Figura 4.49** – Ponto 9 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados



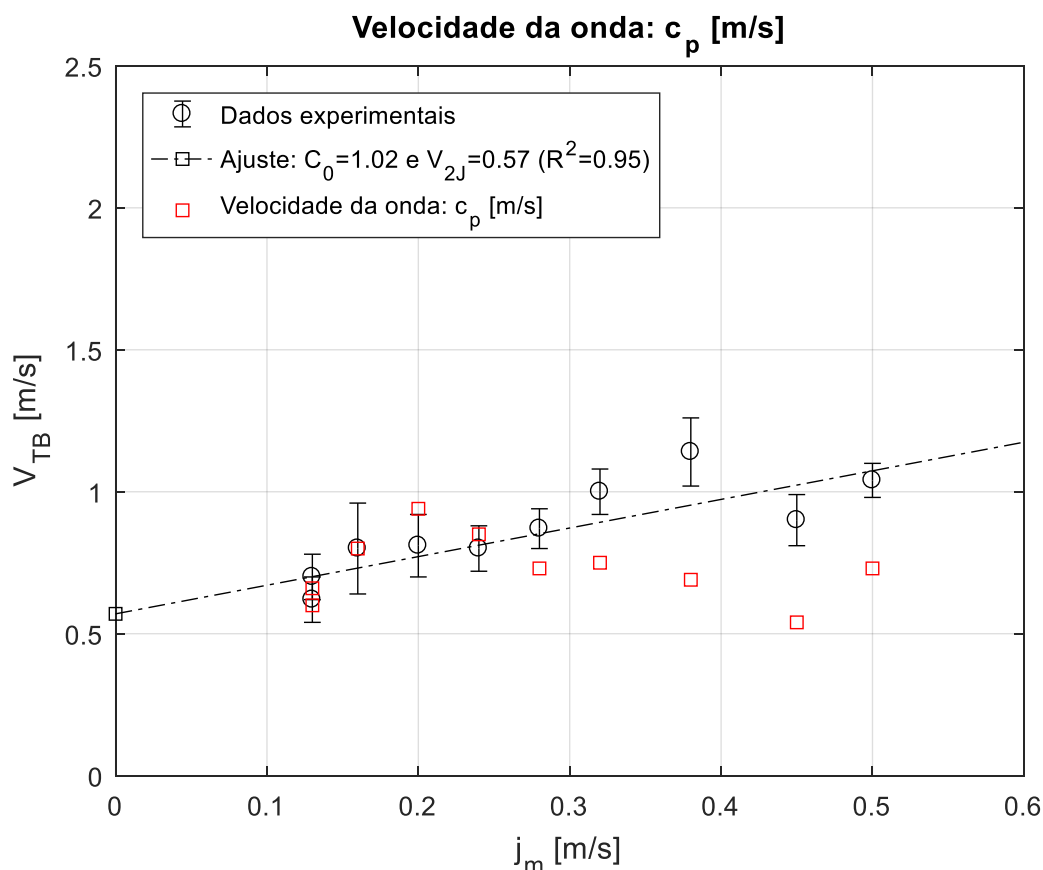
**Figura 4.50** – Ponto 10 da matriz de testes (Tabela 4.1): Fase e Coerência da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados

Como esperado e discutido no APÊNDICE A durante a modelagem expressa pelas Equações (A.33) e (A.40), é possível visualizar a influência da onda cinemática no sinal de pressão diferencial, porém, a partir da análise dos gráficos de fase do espectro cruzado da Figura 4.41 à Figura 4.50, percebe-se que a banda de frequência onde observa-se tal influência (20-25 Hz) não possui uma fase perfeitamente linear, o que corrobora o indício de que a onda cinemática seja dispersiva como expresso pelas Equações (A.86), (A.81), (A.82) e (A.83). A estimativa de uma velocidade de fase única torna-se especialmente difícil neste caso, logo

indicou-se nos gráficos somente um valor coerente com o previsto, como indicado na Tabela 4.2 e Figura 4.51. O próximo passo, sugerido como trabalho futuro, é filtrar esta banda do sinal e estudar suas propriedades em comparação com a função indicadora de fases estimadas.

**Tabela 4.2** – Velocidades das Ondas Cinemáticas

Ponto da Matriz de Testes (Tabela 4.1)	$V_w$ [m/s]	$c_p$ [m/s]
1	0.70	0.66
2	0.71	0.6
3	0.73	0.8
4	0.78	0.94
5	0.81	0.85
6	0.85	0.73
7	0.90	0.75
8	0.95	0.69
9	1.03	0.54
10	1.08	0.73



**Figura 4.51** – Velocidades das Ondas Cinemáticas

Por fim, nesta seção estimou-se os principais parâmetros da célula unitária através do processamento de imagens que permitem a descrição do escoamento intermitente em dutos anulares, estes resultados serão utilizados para a caracterização do escoamento de entrada ao estudarmos o separador gás-líquido. Demonstrou-se que o envelope do sinal de pressão diferencial normalizado é afetado pela passagem da bolha de Taylor, desta forma, indica-se que a assinatura temporal do sinal de pressão diferencial normalizado possa ser usada para detectar o padrão intermitente e estimar suas propriedades, como fora proposto de forma preliminar para o cálculo da velocidade de fase a partir da fase da PSD cruzada dos sinais de pressão diferencial normalizados.

Em virtude das discrepâncias observadas e relatadas acima em relação aos modelos clássicos para dutos de seção circular no padrão intermitente, não faz sentido compararmos os gradientes de pressão medidos com modelos da literatura.

## 5 SEPARADOR GÁS-LÍQUIDO ANULAR INCLINADO

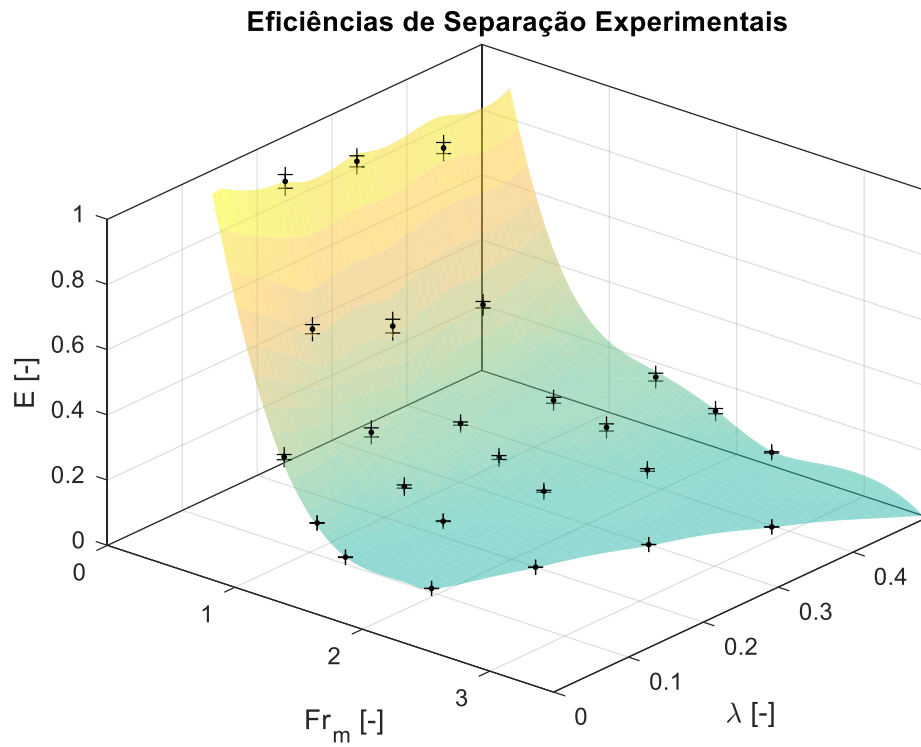
O objetivo deste capítulo é analisar o processo de separação gás-líquido no duto anular inclinado, a partir do levantamento experimental das eficiências médias de separação relativas a matriz de testes definida na Seção 3.1. Por fim, será proposto um modelo para o escorregamento radial.

### 5.1 Resultados

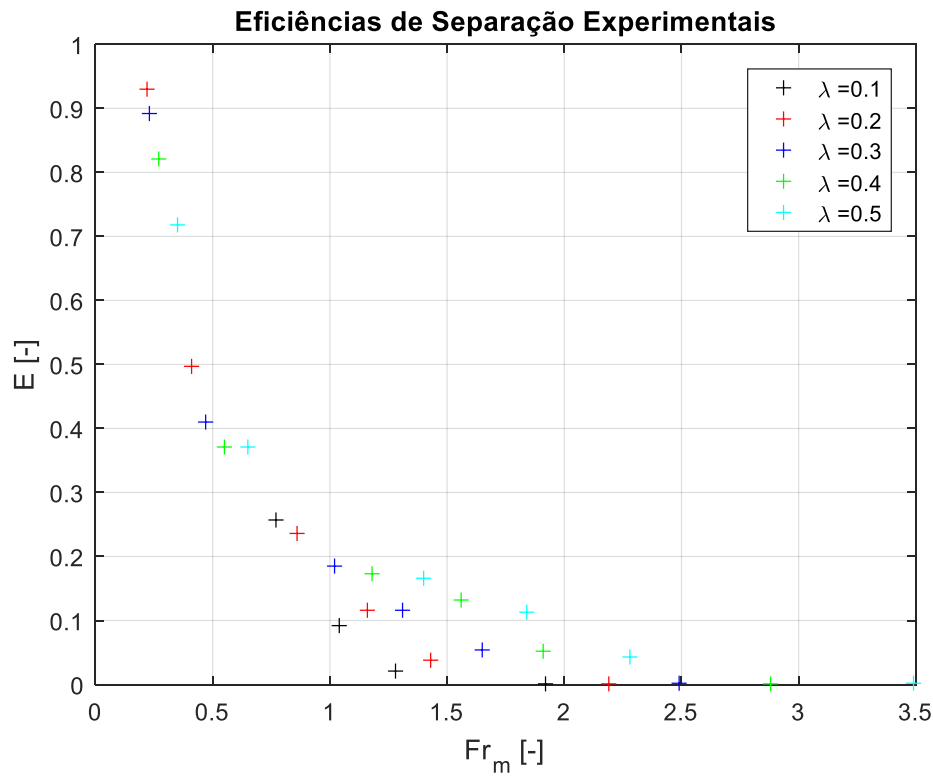
Durante os experimentos, para cada ponto da matriz experimental representada na Tabela 4.1 com 5 repetições, alagou-se o duto anular com líquido em sua totalidade a partir da drenagem do gás acumulado no topo, a eficiência de separação foi então estimada a partir da medição do tempo necessário para a drenagem do líquido no duto anular até que a interface gás-líquido atingisse uma marca de referência padronizada localizada no flange a 1.98 m do topo. Com o tempo e as vazões medidas estima-se o volume de gás injetado e a partir da posição do nível drenado estima-se o volume de gás acumulado no topo, de posse destes dados, o cálculo da eficiência média é direto.

$$\bar{E} = \frac{V_{TOPO}}{V_{ANULAR}} = \frac{\int_0^{t_d} (Q_g - Q_{gs}) dt}{\int_0^{t_d} Q_g dt} \quad (5.1)$$

onde  $V_{TOPO}$  e  $V_{ANULAR}$  são os volumes de gás acumulado no topo e injetado no duto anular respectivamente,  $Q_g$  e  $Q_{gs}$  são as vazões de gás no duto anular e sugadas pelo *intake* respectivamente e  $t_d$  é o tempo de drenagem cronometrado. Deve-se ressaltar que, como dita a Equação (5.1), este procedimento obtém a eficiência média durante a janela de observação, sendo, portanto, uma estimativa. Foram obtidas as seguintes eficiências de separação médias para a matriz de testes previamente definida na Tabela 4.1, como ditam a Figura 5.1 e a Figura 5.2 onde a eficiência de separação é apresentada como função do número de Froude da mistura e da fração de vazio sem escorregamento,  $\lambda$ , variando de 10 a 50%.



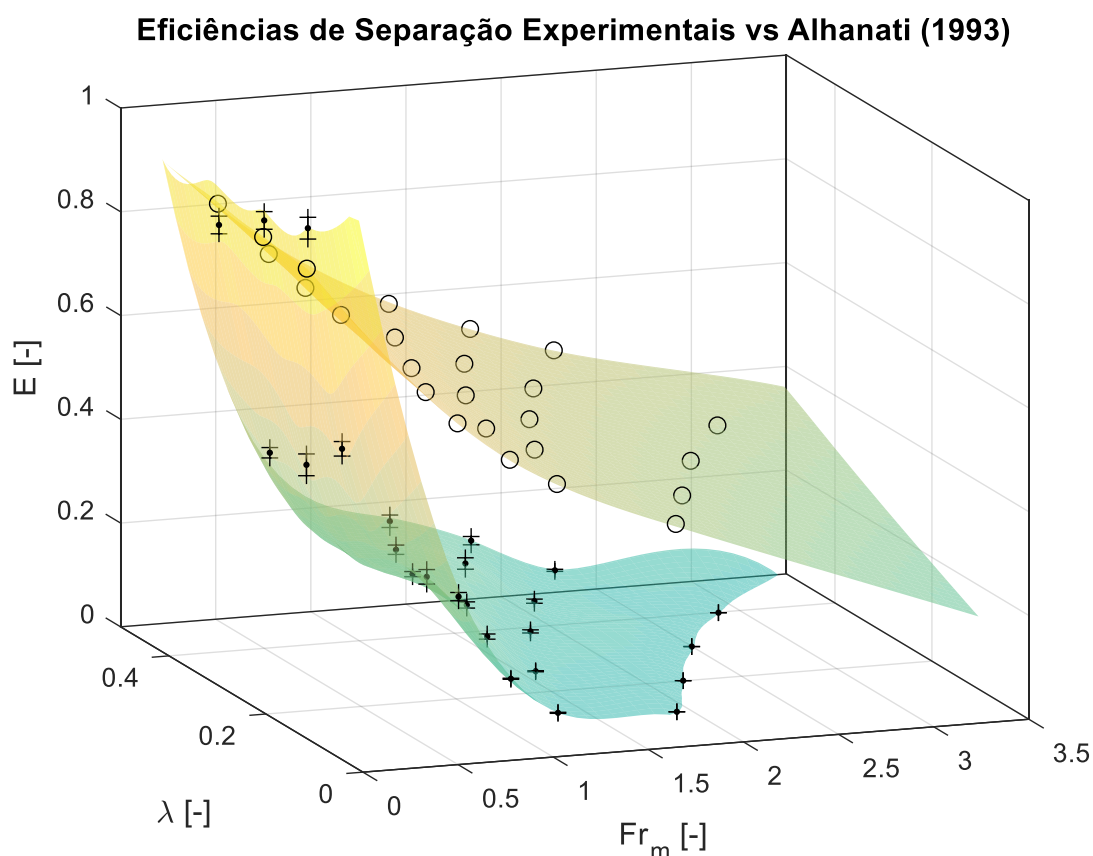
**Figura 5.1** — Visualização 3D da nuvem dos pontos experimentais.



**Figura 5.2** – Eficiências de Separação Experimentais.

Os resultados expressos na Figura 5.2 são qualitativamente consonantes com o esperado, onde as eficiências tendem à 100% quando a vazão de líquido tende à zero (nenhuma bolha seria sugada pelo intake e todas iriam para o topo) e tendem à zero quando a vazão de líquido tende ao infinito (todas as bolhas são sugadas devido ao arrasto da fase líquida), observações estas coerentes com o modelo de Alhanati expresso pela Equação (2.45). Observa-se um aumento da eficiência de separação com o aumento da fração de vazio, como era esperado e reportado na literatura, porém, este efeito fica mais evidente quando o escoamento é supercrítico (ALHANATI, 1993; ALHANATI et al., 1994; LEA; BEARDEN, 1982a, 1982b).

Ao comparar-se a magnitude dos resultados com o estimado pelo modelo de Alhanati (1993), percebem-se grandes desvios como ilustra a Figura 5.3:

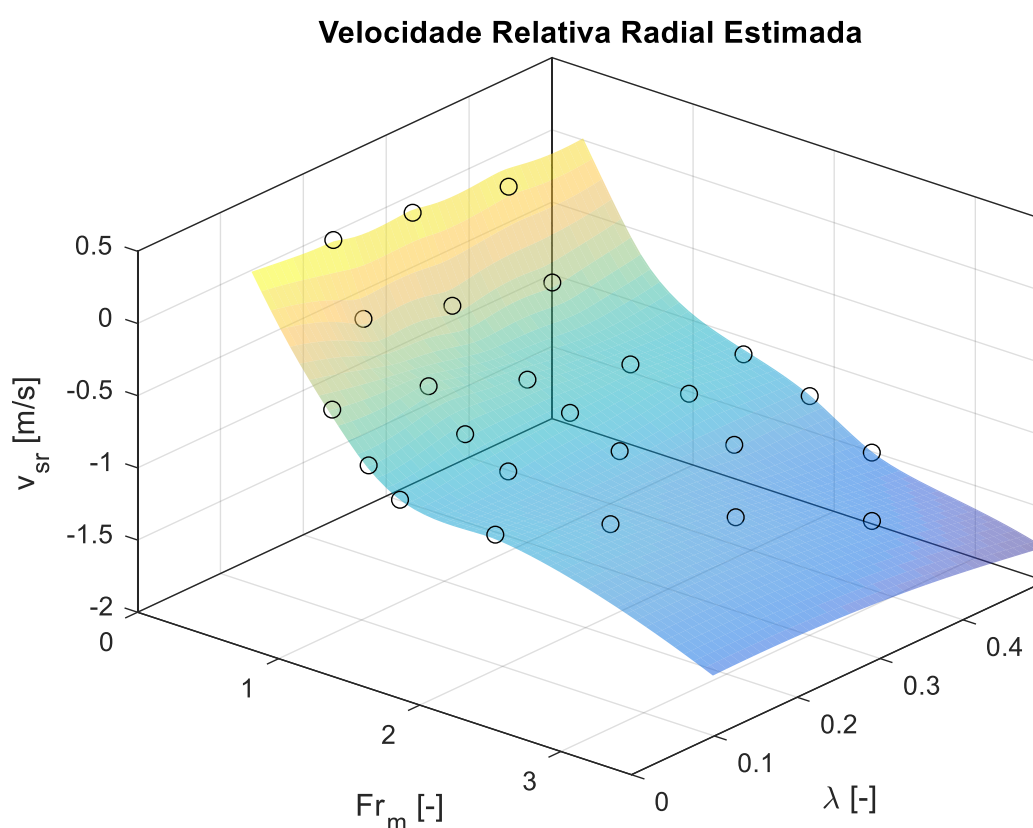


**Figura 5.3** – Comparação dos dados experimentais (+) com o modelo de Alhanati (1993) (o).

Para o cálculo do modelo de Alhanati utilizado na figura acima, necessitou-se de um modelo de fluxo de escorregamento visando estimar a fração de vazio *in situ* no *intake*, na ausência de modelos na literatura para o escoamento no padrão golfadas para dutos anulares inclinados quase horizontais, partiu-se para a medição da velocidade do nariz das bolhas de

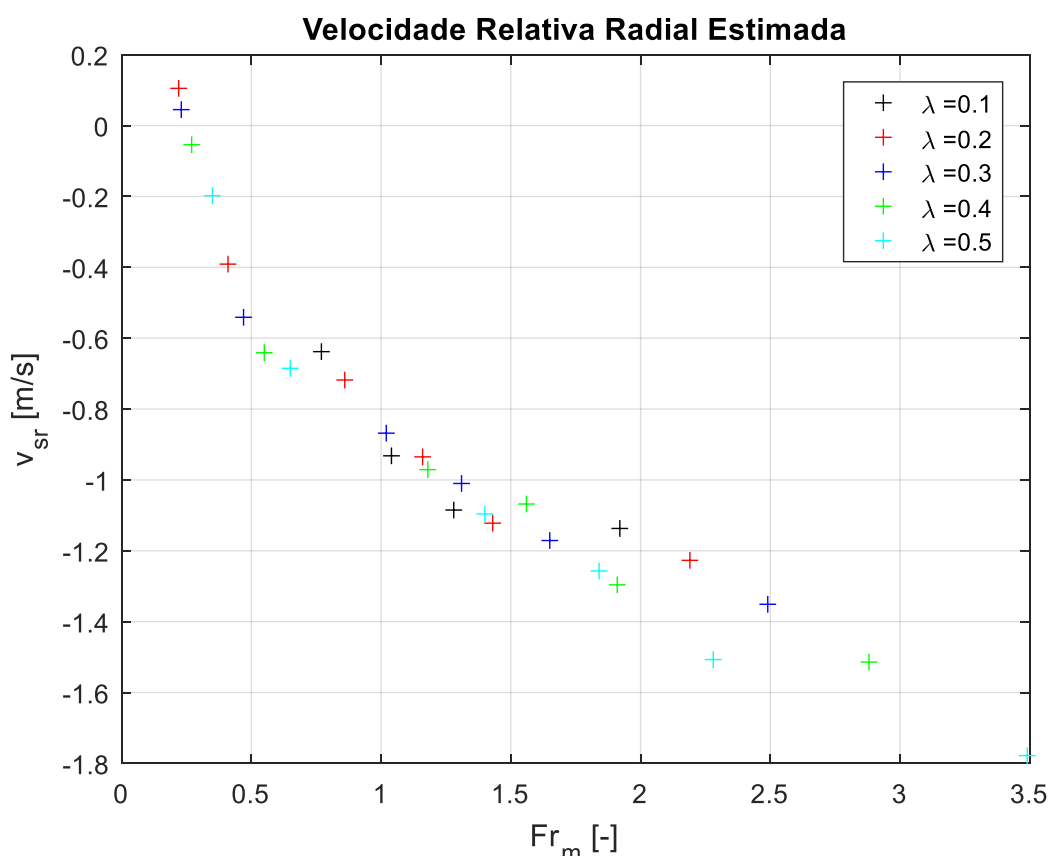
Taylor através do processamento de imagens dos vídeos adquiridos pela câmera de alta velocidades onde foram obtidos os resultados expressos na Figura 4.11 e Equações (4.56) e (4.57).

De posse da fração de vazio estimada e das eficiências obtidas pelo modelo de Alhanati (1993), partiu-se para a estimativa da velocidade relativa radial entre as fases, como já discutido anteriormente, o modelo de Alhanati despreza o escorregamento radial, portanto dados os grandes desvios observados entre o modelo e os dados experimentais, estima-se o escorregamento radial médio a partir dos dados experimentais utilizando a Equação (2.48):



**Figura 5.4** – Visualização 3D do escorregamento radial médio  $v_{sr}$  estimado em função do número de Froude da mistura e da fração de vazios sem escorregamento





**Figura 5.5** – Escorregamento radial médio  $v_{sr}$  estimado em função do número de Froude da mistura

Ao compararmos os resultados expressos na Figura 5.5 com a estimativa inicial do escorregamento radial dada pela Equação (2.140), percebe-se que o escorregamento cresce com a velocidade superficial de mistura como previsto, revelando a importância da aceleração convectiva radial, entretanto esta dependência não parece quadrática como dita a Equação (2.140) pois a taxa de crescimento desta decai com o aumento da velocidade de mistura, exceto para pequenas velocidades de mistura, onde pode-se observar que o perfil da Figura 5.5 remonta uma parábola invertida. Fisicamente, a velocidade relativa não deveria crescer indefinidamente, revelando que o escorregamento tem que ter um limite assintótico, pois para altas vazões o escoamento deve convergir para o modelo homogêneo.

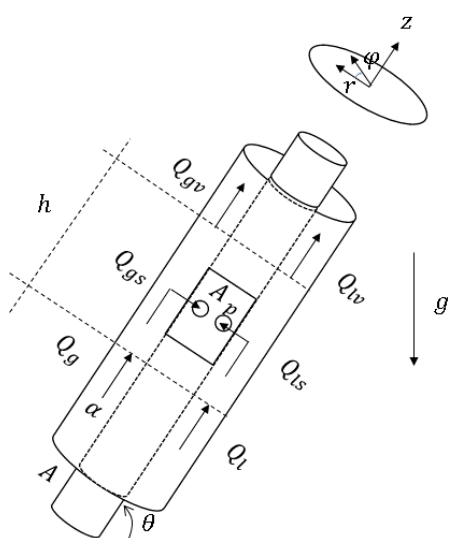
Além do mais, aparentemente ao escrever a velocidade relativa em função do número de Froude da mistura, os dados colapsam em uma única curva. Percebe-se que quando a velocidade superficial da mistura tende à zero, o escorregamento radial obtido qualitativamente a partir da extrapolação das curvas da Figura 5.5 ao cruzarem o eixo das ordenadas não é nula o que evidencia o escorregamento devido ao empuxo projetado na direção

radial, presente mesmo sob vazão de mistura tendendo à zero, cenário equivalente à ascensão de uma única bolha em um meio estacionário.

## 5.2 Modelo de Escorregamento para o Separador Gás-Líquido Anular Inclinado

Parte-se do modelo de dois fluidos incompressíveis escrito para coordenadas cilíndricas, em regime permanente, com propriedades localmente constantes, desprezando os efeitos das tensões interfaciais e sem transferência de massa entre as fases (BERGLES et al., 1981; ISHII; HIBIKI, 2011). Além das hipóteses já descritas, assume-se simetria axial para as velocidades (sem variação azimuthal). Desta forma, sob tais hipóteses, as equações de conservação de massa e momento para o modelo de dois fluidos são dadas pelas Equações (2.96), (2.97) e (2.98) citadas na Seção 2.7.

Como estamos interessados na variação radial das velocidades e o impacto destas na aceleração convectiva e consequentemente no modelo de fluxo de escorregamento, as Equações (2.96), (2.97) e (2.98) serão integradas ao longo do eixo  $z$  do duto no volume de controle logo à frente do *intake* representado na Figura 5.6, sendo representadas em sua forma fraca para esta direção. Além disso, serão assumidas algumas hipóteses simplificadoras quanto ao campo de velocidades, a primeira delas é a simetria axial já citada, ou seja, as velocidades não variam com o azimuth, as velocidades axiais serão consideradas constantes ao longo do raio e as radiais constantes ao longo do comprimento do duto.



**Figura 5.6** –Volume de Controle.

A Equação da Conservação de Massa para a fase líquida é reescrita a partir da Equação (2.96) em sua forma fraca e incompressível para o volume de controle representado na Figura 5.6:

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \alpha_1 v_{1r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_1 v_{1z}) \right] dz = 0 \quad (5.2)$$

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \overline{\alpha_1 v_{1r}} \right) \right] dz = - \int_0^h \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{\alpha_1 v_{1z}} \right) \right] dz \quad (5.3)$$

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{1r}) \right] dz = - \int_0^h \frac{\partial j_{1z}}{\partial z} dz \quad (5.4)$$

Se  $j_{1r}$  só variar com o raio e a velocidade superficial do líquido for nula no topo (condição de contorno onde todo o líquido é drenado):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{1r}) \int_0^h dz = - \int_0^h \frac{\partial j_{1z}}{\partial z} dz = -j_{1z}|_0^h = -(0 - j_1) = j_1 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r j_{1r}) = \frac{j_1}{h} r \quad (5.6)$$

onde  $j_1$  é a velocidade superficial de líquido vinda do duto anular, ou seja, na base do volume de controle. Integrando a Equação (5.6):

$$\int \frac{\partial}{\partial r} (r j_{1r}) dr = \int \frac{j_1}{h} r dr \quad (5.7)$$

$$j_{1r} = \frac{j_1}{2h} r + \frac{C_1}{r} \quad (5.8)$$

Aplicando as condições de contorno (velocidade nula no raio externo – condição de não deslizamento):

$$j_{1r}(r_e) = 0 \Leftrightarrow \frac{j_1}{2h} r_e + \frac{C_1}{r_e} \Leftrightarrow C_1 = -\frac{j_1}{2h} r_e^2 \quad (5.9)$$

Logo:

$$j_{1r} = \frac{j_1}{2h} r - \frac{j_1 r_e^2}{2h} \frac{1}{r} \quad (5.10)$$

Reescrevendo:

$$j_{1r}(r) = j_1 \frac{r_e}{2h} \left[ \left( \frac{r}{r_e} \right) - \left( \frac{r_e}{r} \right) \right] \quad (5.11)$$

Repetindo o procedimento acima para a fase gasosa, parte-se da Equação da Conservação de Massa para a fase gasosa reescrita a partir da Equação (2.96) em sua forma fraca e incompressível:

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{j_{2r}}{\alpha_2 v_{2r}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{j_{2z}}{\alpha_2 v_{2z}} \right) \right] dz = 0 \quad (5.12)$$

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{2r}) \right] dz = - \int_0^h \frac{\partial j_{2z}}{\partial z} dz \quad (5.13)$$

Integrando a Equação (5.13) e aplicando as condições de contorno (velocidade superficial do gás no topo dada pela eficiência de separação):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{2r}) \int_0^h dz = - \int_0^h \frac{\partial j_{2z}}{\partial z} dz = -j_{2z}|_0^h = -(E j_2 - j_2) = j_2(1 - E) \quad (5.14)$$

onde  $E$  é a eficiência de separação. Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rj_{2r}) = \frac{j_2(1-E)}{h}r \quad (5.15)$$

Integrando a Equação (5.15):

$$\int \frac{\partial}{\partial r}(rj_{2r}) dr = \int \frac{j_2(1-E)}{h}r dr \quad (5.16)$$

$$j_{2r} = \frac{j_2(1-E)}{2h}r + \frac{C_2}{r} \quad (5.17)$$

Aplicando as condições de contorno (velocidade nula no raio externo – condição de não deslizamento):

$$j_{2r}(r_e) = 0 \Leftrightarrow \frac{j_2(1-E)}{2h}r_e + \frac{C_2}{r_e} \Leftrightarrow C_2 = -\frac{j_2(1-E)}{2h}r_e^2 \quad (5.18)$$

Substituindo o resultado expresso na Equação (5.18) na Equação (5.17):

$$j_{2r} = \frac{j_2(1-E)}{2h}r - \frac{j_2(1-E)}{2h}r_e^2 \frac{1}{r} \quad (5.19)$$

Reescrevendo:

$$j_{2r}(r) = j_2(1-E) \frac{r_e}{2h} \left[ \left( \frac{r}{r_e} \right) - \left( \frac{r_e}{r} \right) \right] \quad (5.20)$$

As velocidades superficiais radiais dadas pelas Equações (5.11) e (5.20) variam com o raio na medida que há uma variação da área aberta ao fluxo com o raio. Como estamos interessados na eficiência global do sistema, teríamos que considerar os efeitos ao longo do raio, ou seja, em todo o domínio, portanto deve-se considerar no futuro a aplicação de um operador de média. As velocidades superficiais se relacionam pela relação cinemática do modelo de escorregamento:

$$v_{sr}(r) = v_{2r}(r) - v_{1r}(r) = \frac{j_{2r}(r)}{\alpha(r)} - \frac{j_{1r}(r)}{(1 - \alpha(r))} \quad (5.21)$$

Substituindo as velocidades superficiais para as fases líquida e gasosa expressas pelas Equações (5.11) e (5.20):

$$v_{sr}(r) = \left( \frac{j_2}{\alpha(r)} \right) \left\{ (1 - E) - \left[ \frac{\alpha(r)}{(1 - \alpha(r))} \right] \left[ \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \right] \right\} \left[ \left( \frac{r_e}{2h} \right) \left( \frac{r}{r_e} - \frac{r_e}{r} \right) \right] \quad (5.22)$$

Como  $j_2$ ,  $E$  e  $\lambda$  são constantes por premissa neste modelo, a Equação (5.22) revela que há uma dependência radial entre o escorregamento e a fração de vazio no volume de controle à frente do *intake*, o que era esperado. A Equação (5.22) pode ser rearranjada de uma forma similar ao modelo de Alhanati acrescido dos efeitos do escorregamento radial entre as fases (ALHANATI, 1993; ALHANATI et al., 1994; MARQUEZ, 2004; MARQUEZ; PRADO, 2003):

$$E = 1 - \left[ \frac{\alpha(r)}{(1 - \alpha(r))} \right] \left[ \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \right] - \left( \frac{\alpha(r)}{j_2} \right) \overbrace{\left[ \frac{v_{sr}(r)}{\left( \frac{r_e}{2h} \right) \left( \frac{r}{r_e} - \frac{r_e}{r} \right)} \right]}^{\widetilde{v_{sr}}} \quad (5.23)$$

A Equação (5.23) se assemelha a descrita por Marques (2004) na Equação (2.42), exceto que neste caso a fração de vazio e o escorregamento radial variam com o raio. Para fechar o modelo, necessita-se descrever o escorregamento entre as fases, porém estamos interessados em descrever o escorregamento médio radial para derivar um modelo unidimensional simplificado.

A partir da estimativa dos campos de velocidade dados pelas Equações (5.11) e (5.20), parte-se para a estimativa da taxa de transferência líquida média de momento interfacial por unidade de volume com o objetivo de estimar o escorregamento entre as fases. Para tal, reescreve-se a Equação da conservação da quantidade de movimento para a direção axial dada pela Equação (2.97) para ambas as fases:

$$\alpha_1 \rho_1 \left( v_{kr} \frac{\partial v_{1z}}{\partial r} + v_{1z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) + \alpha_1 \frac{\partial P}{\partial z} - \alpha_1 \rho_1 g_z + \overbrace{\widehat{M}_{1z}}^{-M_{2z}} = 0 \quad (5.24)$$

$$\alpha_2 \rho_2 \left( v_{2r} \frac{\partial v_{2z}}{\partial r} + v_{2z} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right) + \alpha_2 \frac{\partial P}{\partial z} - \alpha_2 \rho_2 g_z + M_{2z} = 0 \quad (5.25)$$

Isola-se o termo do gradiente de pressão (assumido igual para ambas as fases) visando a subtração das Equações (5.24) e (5.25), além de dividir todo o resultado por  $\rho_1$ :

$$\left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left( v_{2r} \frac{\partial v_{2z}}{\partial r} + v_{2z} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right) - v_{kr} \frac{\partial v_{1z}}{\partial r} - v_{1z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} g_z + \frac{M_{2z}}{\rho_1 \alpha (1 - \alpha)} = 0 \quad (5.26)$$

Se considerarmos que as velocidades  $v_{kz}$  variam majoritariamente ao longo de  $z$  e que a massa específica do líquido é muito superior à do gás, simplifica-se a Equação (5.26), além de isolar o termo de transferência interfacial líquida média de momento entre as fases, neste caso momento recebido pela fase gasosa na direção axial:

$$M_{2z} = \rho_1 \alpha (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_{1z}^2}{2} \right) - \alpha (1 - \alpha) (\rho_1 - \rho_2) g_z \quad (5.27)$$

Como assumiu-se incompressibilidade dos fluidos, pode-se reescrever a Equação (5.27):

$$M_{2z} = \alpha (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\rho_1 v_{1z}^2}{2} - (\rho_1 - \rho_2) g_z z \right] \quad (5.28)$$

A Equação (5.28) nos diz que o momento recebido pela fase gasosa na direção axial é aproximadamente a variação da energia mecânica da fase líquida. Agora repete-se o mesmo raciocínio para a direção radial escrevendo-se a Equação da conservação da quantidade de movimento para a direção radial de ambas as fases a partir da Equação (2.98):

$$\alpha_1 \rho_1 \left( v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + v_{1z} \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) + \alpha_1 \frac{\partial P}{\partial r} - \alpha_1 \rho_1 g_r + M_{1r} = 0 \quad (5.29)$$

$$\alpha_2 \rho_2 \left( v_{2r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + v_{2z} \frac{\partial v_{2r}}{\partial z} \right) + \alpha_2 \frac{\partial P}{\partial r} - \alpha_2 \rho_2 g_r + M_{2r} = 0 \quad (5.30)$$

Isola-se o termo do gradiente de pressão (assumido igual para ambas as fases) visando a subtração das Equações (5.29) e (5.30) , além de dividir todo o resultado por  $\rho_1$ :

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\ll 1} \left( v_{2r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + v_{2z} \frac{\partial v_{2r}}{\partial z} \right) - v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} - v_{1z} \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} g_r + \frac{M_{2r}}{\rho_1 \alpha (1 - \alpha)} = 0 \quad (5.31)$$

Se considerarmos que as velocidades  $v_{kr}$  variam majoritariamente ao longo de  $r$  e que a massa específica do líquido é muito superior à do gás, simplifica-se a Equação (5.26), além de isolar o termo de transferência interfacial líquida média de momento entre as fases, neste caso momento recebido pela fase gasosa na direção radial:

$$M_{2r} = \rho_1 \alpha (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{1r}^2}{2} \right) - \alpha (1 - \alpha) (\rho_1 - \rho_2) g_r \quad (5.32)$$

Assim como feito na direção axial, a Equação (5.32) pode ser reescrita:

$$M_{2r} = \alpha (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\rho_1 v_{1r}^2}{2} - (\rho_1 - \rho_2) g_r r \right] \quad (5.33)$$

A Equação (5.33) nos diz que o momento recebido pela fase gasosa na direção radial é aproximadamente a variação da energia mecânica da fase líquida. Com as taxas líquidas de transferência média de momento entre as fases estimadas, parte-se para modelar este termo, relacionando-o com a velocidade relativa entre as fases. A partir do modelo de Zuber (1964), pode-se modelar o termo de transferência líquida de momento médio por unidade de volume da fase líquida para a gasosa desprezando o termo de sustentação (ISHII; HIBIKI, 2011; ISHII; ZUBER, 1979; ZUBER, 1964):

$$M_2 = M_2^A + M_2^{MA} + M_2^B \quad (5.34)$$

onde  $M_2^A$  é o termo do arrasto,  $M_2^{MA}$  representa a massa adicionada e  $M_2^B$  a força de Basset. O termo relativo a força de arrasto  $M_2^A$  pode ser deduzido de forma similar às Equações (2.106),



(2.107) e (2.108) como feito por Marquez (2004) (ISHII; HIBIKI, 2011; ISHII; ZUBER, 1979; MARQUEZ, 2004; ZUBER, 1964):

$$M_2^A = -\frac{\alpha F_d}{B_d} \quad (5.35)$$

onde a força de arrasto para uma esfera é dada por:

$$F_d = -\frac{1}{2} C_d \rho_1 (\pi r_d^2) v_s |v_s| \quad (5.36)$$

Substituindo as Equações (5.36) e (2.108) (volume da bolha com dimensão característica) na (5.35), temos:

$$M_2^A = \alpha \left( \frac{c'_A}{\frac{3C_d}{8r_d}} \right) \rho_1 v_s |v_s| \quad (5.37)$$

onde  $C_d$  é o coeficiente de arrasto da bolha média com dimensão característica  $r_d$ . Deve-se ressaltar que há uma relação entre a dimensão característica e a fração de vazio representada pela densidade de área interfacial que varia para cada padrão de escoamento. Dadas as várias possibilidades, estes termos serão deixados em aberto por fugirem do escopo deste trabalho, cujo efeito global será representado pela variável  $C'_A$  que representa uma relação constitutiva da força de arrasto para cada padrão de escoamento (ISHII; HIBIKI, 2011):

$$M_2^A = \alpha \rho_1 C'_A v_s |v_s| \quad (5.38)$$

A velocidade relativa será deduzida a partir do termo de arrasto como mostra a Equação (5.38) que seria suficiente para a descrição de um escoamento estacionário, desenvolvido e em regime permanente, porém como no caso do separador gás líquido anular inclinado temos uma forte aceleração convectiva axial e radial, teremos que considerar mais termos. A Equação (5.38), pode ser projetada nas direções axial e radial respectivamente:

$$M_{2z}^A = \alpha \rho_1 C'_A v_{sz} |v_s| \quad (5.39)$$

$$M_{2r}^A = \alpha \rho_1 C'_A v_{sr} |v_s| \quad (5.40)$$

O termo relativo à massa adicionada para o padrão de bolhas dispersas é dado por (ISHII; HIBIKI, 2011; ISHII; ZUBER, 1979; ZUBER, 1964):

$$M_2^{MA} = \frac{1}{2} \alpha \frac{(1 + 2\alpha)}{(1 - \alpha)} \rho_1 \frac{Dv_s}{Dt} \quad (5.41)$$

Que pode ser reescrito:

$$M_2^{MA} = \alpha \rho_1 \overbrace{\left[ \frac{1}{2} \frac{(1 + 2\alpha)}{(1 - \alpha)} \right]}^{C'_{MA}} \frac{D}{Dt} (v_2 - v_1) = \alpha \rho_1 C'_{MA} \left( \frac{Dv_2}{Dt} - \frac{Dv_1}{Dt} \right) \quad (5.42)$$

Agrupou-se uma série de termos no coeficiente de massa adicionada  $C'_{MA}$  por envolver uma equação constitutiva para cada padrão de escoamento, que será deixado em aberto por não ser escopo deste trabalho, de forma similar ao feito para o termo do arrasto. Como assumiu-se por premissa escoamento em regime permanente:

$$M_2^{MA} = \alpha \rho_1 C'_{MA} \left( \overbrace{\frac{\partial v_2}{\partial t}}^{=0} + v_2 \cdot \nabla v_2 - \overbrace{\frac{\partial v_1}{\partial t}}^{=0} - v_1 \cdot \nabla v_1 \right) \quad (5.43)$$

$$M_2^{MA} = \alpha \rho_1 C'_{MA} (v_2 \cdot \nabla v_2 - v_1 \cdot \nabla v_1) \quad (5.44)$$

A Equação (5.44), pode ser projetada nas direções axial e radial, para tal considera-se que as velocidades  $v_{kz}$  variam majoritariamente ao longo de  $z$  e que as velocidades  $v_{kr}$  variam majoritariamente ao longo de  $r$ , desta forma os operadores da derivada material dos vetores velocidade representados na Equação (5.44) ficam:

$$M_{2z}^{MA} = \alpha \rho_1 C'_{MA} \left( v_{2z} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} - v_{1z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) \quad (5.45)$$

$$M_{2r}^{MA} = \alpha \rho_1 C'_{MA} \left( v_{2r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} - v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \right) \quad (5.46)$$

Que podem ser reescritas para as direções axial e radial respectivamente:

$$M_{2z}^{MA} = \alpha \rho_1 C'_{MA} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_{2z}^2 - v_{1z}^2}{2} \right) \right] \quad (5.47)$$

$$M_{2r}^{MA} = \alpha \rho_1 C'_{MA} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{2r}^2 - v_{1r}^2}{2} \right) \right] \quad (5.48)$$

Ou seja, a transferência líquida de momento média via massa adicionada para a fase gasosa equivale à diferença dos gradientes de energia cinética entre as fases. O termo relativo à força de *Basset* é dado por (ISHII; HIBIKI, 2011; ISHII; ZUBER, 1979; ZUBER, 1964):

$$M_2^B = - \frac{9}{2} \frac{\alpha}{r_D} \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_m}{\pi}} \int_0^t \frac{Dv_s}{D\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{t-\xi}} \quad (5.49)$$

Onde  $\xi$  é a variável de integração relativa ao tempo e  $\mu_m$  é a viscosidade da mistura. Ao expandir a derivada material e utilizar as mesmas premissas e hipóteses citadas anteriormente:

$$M_2^B = - \frac{9}{2} \frac{\alpha}{r_D} \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_m}{\pi}} \int_0^t \left( \frac{Dv_2}{D\xi} - \frac{Dv_1}{D\xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{t-\xi}} \quad (5.50)$$

$$M_2^B = - \frac{9}{2} \frac{\alpha}{r_D} \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_m}{\pi}} \int_0^t \left( \frac{\overbrace{\partial v_2}^{=0}}{\partial \xi} + v_2 \cdot \nabla v_2 - \frac{\overbrace{\partial v_1}^{=0}}{\partial \xi} - v_1 \cdot \nabla v_1 \right) \frac{d\xi}{\sqrt{t-\xi}} \quad (5.51)$$

Como assumiu-se regime permanente, as derivadas temporais são nulas e consequentemente os termos convectivos não dependem do tempo, portanto podem ser retirados da integral.

$$M_2^B = -\frac{9}{2} \frac{\alpha}{r_D} \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_m}{\pi}} (v_2 \cdot \nabla v_2 - v_1 \cdot \nabla v_1) \int_0^t \frac{d\xi}{\sqrt{t-\xi}} \quad (5.52)$$

$$M_2^B = -\frac{9}{2} \frac{\alpha}{r_D} \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_m}{\pi}} (v_2 \cdot \nabla v_2 - v_1 \cdot \nabla v_1) \left( -2\sqrt{t-\xi} \Big|_0^t \right) \quad (5.53)$$

$$M_2^B = -\alpha \rho_1 \overbrace{\left[ \frac{9\sqrt{t}}{r_D} \sqrt{\frac{\mu_m}{\pi \rho_1}} \right]}^{C'_B} (v_2 \cdot \nabla v_2 - v_1 \cdot \nabla v_1) \quad (5.54)$$

O termo  $\sqrt{t}$  representa a escala de tempo da força de *Basset*, como este termo advém do intervalo de integração, ele estaria ligado ao tempo e residência da fase gasosa no domínio sob análise. Como feito anteriormente, a Equação (5.54) será escrita em uma forma generalizada a partir do coeficiente da força de *Basset*  $C'_B$  que depende de cada padrão de escoamento e a descrição detalhada desta relação constitutiva foge ao escopo deste trabalho.

$$M_2^B = -\alpha \rho_1 C'_B (v_2 \cdot \nabla v_2 - v_1 \cdot \nabla v_1) \quad (5.55)$$

A força de *Basset* pode ser decomposta nas direções axial e radial de forma similar à força de massa adicionada:

$$M_{2z}^B = -\alpha \rho_1 C'_B \left( v_{2z} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} - v_{1z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) \quad (5.56)$$

$$M_{2r}^B = -\alpha \rho_1 C'_B \left( v_{2r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} - v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \right) \quad (5.57)$$

Que podem ser reescritas:

$$M_{2z}^B = -\alpha \rho_1 C'_B \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_{2z}^2 - v_{1z}^2}{2} \right) \right] \quad (5.58)$$

$$M_{2r}^B = -\alpha \rho_1 C_B' \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{2r}^2 - v_{1r}^2}{2} \right) \right] \quad (5.59)$$

Sumarizando os resultados obtidos até agora, a transferência líquida de momento média por unidade de volume recebida pela fase gasosa na direção axial é dada a partir da Equação (5.28), que deve ser igual ao equilíbrio de forças sobre as bolhas de gás na direção axial como representado na Equação (5.34). Logo, a partir das Equações (5.39), (5.47) e (5.58):

$$M_{2z} = \alpha \rho_1 \left\{ C_A' v_{sz} |v_s| + (C_{MA}' - C_B') \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_{2z}^2 - v_{1z}^2}{2} \right) \right] \right\} \quad (5.60)$$

Igualam-se as Equações (5.28) e (5.60) visando isolar o termo da velocidade relativa axial entre as fases:

$$\begin{aligned} v_{sz} |v_s| = & \left[ \frac{(1 - \alpha) + (C_{MA}' - C_B')}{C_A'} \right] \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_{1z}^2}{2} \right) - \left[ \frac{(1 - \alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C_A' \rho_1} \right] g_z \\ & - \left[ \frac{(C_{MA}' - C_B')}{C_A'} \right] \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_{2z}^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Estamos interessados no escorregamento axial médio, portanto:

$$\overline{v_{sz} |v_s|} = \frac{1}{h} \int_0^h v_{sz} |v_s| dz \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \overline{v_{sz} |v_s|} = & \left[ \frac{(1 - \alpha) + (C_{MA}' - C_B')}{C_A'} \right] \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_{1z}^2}{2} \right) dz \\ & - \left[ \frac{(1 - \alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C_A' \rho_1} \right] g_z \\ & - \left[ \frac{(C_{MA}' - C_B')}{C_A'} \right] \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_{2z}^2}{2} \right) dz \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\overline{v_{sz}|v_s|} = \left[ \frac{(1-\alpha) + (C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{1}{2h} (v_{1z}^2)|_0^h - \left[ \frac{(1-\alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C'_A \rho_1} \right] g_z - \left[ \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{1}{2h} (v_{2z}^2)|_0^h \quad (5.64)$$

Aplicado as condições de contorno já citadas no domínio de integração:

$$\begin{aligned} \overline{v_{sz}|v_s|} = & \left[ \frac{(1-\alpha) + (C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{1}{2h} \left[ 0 - \left( \frac{j_1}{1-\alpha} \right)^2 \right] \\ & - \left[ \frac{(1-\alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C'_A \rho_1} \right] g_z \\ & - \left[ \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{1}{2h} \left[ \left( \frac{E j_2}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{j_2}{\alpha} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \overline{v_{sz}|v_s|} = & - \left[ \frac{(1-\alpha) + (C'_{MA} - C'_B)}{2h C'_A (1-\alpha)^2} \right] j_1^2 - \left[ \frac{(1-\alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C'_A \rho_1} \right] g_z \\ & - \left[ \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{2h C'_A \alpha^2} \right] (E^2 - 1) j_2^2 \end{aligned} \quad (5.66)$$

A Equação (5.66) é reescrita em função da velocidade superficial de mistura  $j_m$ :

$$\begin{aligned} \overline{v_{sz}|v_s|} = & - \frac{1}{2h} \frac{(1-\alpha)}{C'_A} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{C'_{MA} - C'_B}{1-\alpha} \right) \right] \left( \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \right)^2 \right. \\ & \left. - \left( \frac{C'_{MA} - C'_B}{1-\alpha} \right) (1 - E^2) \left( \frac{\lambda}{\alpha} \right)^2 \right\} j_m^2 \\ & - \frac{(1-\alpha)}{C'_A} \left[ \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \right] g_z \end{aligned} \quad (5.67)$$

Resta repetir o mesmo procedimento para a direção radial. A transferência líquida de momento por unidade de volume recebida pela fase gasosa na direção radial é dada a partir da Equação (5.33), que deve ser igual ao equilíbrio de forças sobre as bolhas de gás na direção radial como representado na Equação (5.34). Logo a partir das Equações (5.40), (5.48) e (5.59):

$$M_{2r} = \alpha \rho_1 \left\{ C'_A v_{sr} |v_s| + (C'_{MA} - C'_B) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{2r}^2 - v_{1r}^2}{2} \right) \right] \right\} \quad (5.68)$$

Igualam-se as Equações (5.33) e (5.68) visando isolar o termo da velocidade relativa radial entre as fases:

$$v_{sr} |v_s| = \frac{(1 - \alpha)}{C'_A} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{v_{1r}^2}{2} - \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} g_r r \right] - \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{2r}^2 - v_{1r}^2}{2} \right) \right] \quad (5.69)$$

$$v_{sr} |v_s| = \left[ \frac{(1 - \alpha) + (C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{1r}^2}{2} \right) - \left[ \frac{(1 - \alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C'_A \rho_1} \right] g_r - \left[ \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{2r}^2}{2} \right) \quad (5.70)$$

Estamos interessados no escorregamento radial médio, portanto:

$$\overline{v_{sr} |v_s|} = \frac{1}{(r_e - r_i)} \int_{r_i}^{r_e} v_{sr} |v_s| dr \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \overline{v_{sr} |v_s|} &= \left[ \frac{(1 - \alpha) + (C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{1}{(r_e - r_i)} \int_{r_i}^{r_e} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{1r}^2}{2} \right) dr \\ &\quad - \left[ \frac{(1 - \alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C'_A \rho_1} \right] g_r \\ &\quad - \left[ \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{1}{(r_e - r_i)} \int_{r_i}^{r_e} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{2r}^2}{2} \right) dr \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned}
\overline{v_{sr}|v_s|} = & \left[ \frac{(1-\alpha) + (C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{1}{(D_e - D_i)} (v_{1r}^2) \Big|_{r_i}^{r_e} \\
& - \left[ \frac{(1-\alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C'_A \rho_1} \right] g_r \\
& - \left[ \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{1}{(D_e - D_i)} (v_{2r}^2) \Big|_{r_i}^{r_e}
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Aplicado as condições de contorno já discutidas no domínio de integração:

$$\begin{aligned}
\overline{v_{sr}|v_s|} = & \left[ \frac{(1-\alpha) + (C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{1}{(D_e - D_i)} \left[ 0 - \left( \frac{j_{1r}}{1-\alpha} \right)^2 \right] \\
& - \left[ \frac{(1-\alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C'_A \rho_1} \right] g_r \\
& - \left[ \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{C'_A} \right] \frac{1}{(D_e - D_i)} \left[ 0 - \left( \frac{j_{2r}}{\alpha} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{5.74}$$

$$\begin{aligned}
\overline{v_{sr}|v_s|} = & - \left[ \frac{(1-\alpha) + (C'_{MA} - C'_B)}{C'_A (D_e - D_i) (1-\alpha)^2} \right] j_{1r}^2 - \left[ \frac{(1-\alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C'_A \rho_1} \right] g_r \\
& + \left[ \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{C'_A (D_e - D_i) \alpha^2} \right] j_{2r}^2
\end{aligned} \tag{5.75}$$

onde, utilizando a conservação de massa para fluidos incompressíveis:

$$j_{1r} = - \left( \frac{A}{A_p} \right) j_1 \tag{5.76}$$

$$j_{2r} = -(1-E) \left( \frac{A}{A_p} \right) j_2 \tag{5.77}$$

Lembrando que ambas as velocidades são no sentido contrário ao do versor radial. Substituindo os resultados expressos nas Equações (5.76) e (5.77) na Equação (5.75):



$$\begin{aligned} \overline{v_{sr}|v_s|} = & - \left[ \frac{(1-\alpha) + (C'_{MA} - C'_B)}{C'_A(D_e - D_i)(1-\alpha)^2} \right] \left[ - \left( \frac{A}{A_p} \right) j_1 \right]^2 - \left[ \frac{(1-\alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C'_A \rho_1} \right] g_r \\ & + \left[ \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{C'_A(D_e - D_i)\alpha^2} \right] \left[ -(1-E) \left( \frac{A}{A_p} \right) j_2 \right]^2 \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} \overline{v_{sr}|v_s|} = & - \left[ \frac{(1-\alpha) + (C'_{MA} - C'_B)}{C'_A(D_e - D_i)(1-\alpha)^2} \right] \left( \frac{A}{A_p} \right)^2 j_1^2 - \left[ \frac{(1-\alpha)(\rho_1 - \rho_2)}{C'_A \rho_1} \right] g_r \\ & + \left[ \frac{(C'_{MA} - C'_B)}{C'_A(D_e - D_i)\alpha^2} \right] (1-E)^2 \left( \frac{A}{A_p} \right)^2 j_2^2 \end{aligned} \quad (5.79)$$

A Equação (5.79) pode ser rearranjada para ser função da velocidade superficial de mistura:

$$\begin{aligned} \overline{v_{sr}|v_s|} = & - \frac{(1-\alpha)}{C'_A} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{C'_{MA} - C'_B}{1-\alpha} \right) \right] \left( \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \right)^2 \right. \\ & - \left( \frac{C'_{MA} - C'_B}{1-\alpha} \right) (1-E)^2 \left( \frac{\lambda}{\alpha} \right)^2 \left. \right\} \left( \frac{A}{A_p} \right)^2 \frac{j_m^2}{D_{Heq}} \\ & - \frac{(1-\alpha)}{C'_A} \left[ \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \right] g_r \end{aligned} \quad (5.80)$$

Busca-se, ao fim, uma relação para o escorregamento médio radial, porém as equações deduzidas até então dependem de uma série de coeficientes que não conhecemos e não há referências na literatura para um caso similar ao estudado aqui. Além do mais, os termos são multiplicados pela norma do escorregamento total, até então desconhecido. Como mediu-se a priori o escorregamento axial através do processamento de imagens, este será utilizado para normalizar a equação acima a fim de obter uma estimativa para o escorregamento radial.

A distância axial  $h$  equivale ao diâmetro  $D_p$  dos furos das portas do *intake*. Neste caso, deve-se atentar que o *intake* compreende todo o perímetro interno do duto, o que não reflete a realidade, pois a área aberta ao fluxo corresponde a um conjunto de furos equiespaçados ao longo do perímetro interno.

Para o duto anular inclinado, a aceleração da gravidade nas direções axial e radial são dadas pelas Equações (5.81) e (5.82):

$$g_z = -g \sin \theta \quad (5.81)$$

$$g_r = -g \cos \theta \quad (5.82)$$

O número de Froude bifásico para a mistura é dado por (SHOHAM, 2005b):

$$Fr_m^2 = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \frac{j_m^2}{D_H g \cos \theta} \quad (5.83)$$

Por fim, os coeficientes para as forças de arrasto, massa adicionada e força de *Basset* serão separados para cada direção, pois não necessariamente serão iguais, principalmente para os padrões cujas bolhas não são simétricas, ou seja, somente seriam iguais se o padrão de escoamento fosse de bolhas perfeitamente esféricas. Desta forma, teriam relações constitutivas para cada padrão e direção e foram discriminados com os subscritos  $z$  e  $r$  para as direções axial e radial respectivamente. Além disso, os coeficientes para as forças de arrasto, massa adicionada e força de *Basset* serão descrito para uma bolha isolada ao contrário do enxame (ISHII; ZUBER, 1979):

$$C_A^\infty = \frac{C'_A}{1 - \alpha} \quad (5.84)$$

$$C_{MA}^\infty = \frac{C'_{MA}}{1 - \alpha} \quad (5.85)$$

$$C_B^\infty = \frac{C'_B}{1 - \alpha} \quad (5.86)$$

É conveniente agrupar os coeficientes de massa adicionada e *Basset* em um único termo:

$$\Delta C^\infty = \frac{C'_{MA} - C'_B}{1 - \alpha} \quad (5.87)$$

Portanto reescreve-se a Equação (5.80) para o escorregamento radial:

$$\overline{v_{sr}|v_s|} = -\frac{1}{C_{Ar}^\infty} \left[ \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} g \cos \theta \right] \left\{ \left[ 1 + \Delta C_r^\infty - \Delta C_r^\infty (1 - E)^2 \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right)^2 \right] \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \alpha} \right)^2 \left( \frac{A}{A_p} \right)^2 Fr_m^2 - 1 \right\} \quad (5.88)$$

e a Equação (5.67) para o escoamento axial:

$$\overline{v_{sz}|v_s|} = -\frac{1}{C_{Az}^\infty} \left[ \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} g \cos \theta \right] \left\{ \left[ 1 + \Delta C_z'^\infty - \Delta C_z'^\infty (1 - E^2) \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right)^2 \right] \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \alpha} \right)^2 \left( \frac{D_H}{2D_p} \right) Fr_m^2 - \tan \theta \right\} \quad (5.89)$$

Dividindo as Equações (5.88) e (5.89) temos:

$$\overline{v_{sr}} \cong \overline{v_{sr}}^0 \frac{a Fr_m^2 - 1}{b Fr_m^2 - 1} \quad (5.90)$$

onde:

$$\overline{v_{sr}}^0 = v_{sz} \left( \frac{C_{Az}^\infty}{C_{Ar}^\infty \tan \theta} \right) \quad (5.91)$$

$$a = \left( \frac{A}{A_p} \right)^2 \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \alpha} \right)^2 \left\{ 1 + \Delta C_r^\infty \left[ 1 - (1 - E)^2 \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right)^2 \right] \right\} \quad (5.92)$$

$$b = \left( \frac{D_H}{2D_p \tan \theta} \right) \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \alpha} \right)^2 \left\{ 1 + \Delta C_z'^\infty \left[ 1 - (1 - E^2) \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right)^2 \right] \right\} \quad (5.93)$$

O coeficiente  $b$  deve ser negativo para que a Equação (5.90) não possua um polo e tenda ao infinito nas proximidades deste, pois isto implicaria em um resultado não físico:

$$b < 0 \quad (5.94)$$

Isto somente seria possível se o balanço de forças fosse governado pela força de Basset, que possui um coeficiente negativo no termo  $\Delta C_z^\infty$  da Equação (5.93), indicando que ela deve ser dominante para estabilizar o sistema. Os outros coeficientes devem ser positivos:

$$\overline{v_{sr}}^0 > 0 \quad (5.95)$$

$$a > 0 \quad (5.96)$$

Nestas condições, a Equação (5.90) possui um comportamento interessante:

$$\lim_{F_m \rightarrow 0} \overline{v_{sr}} = \overline{v_{sr}}^0 \quad (5.97)$$

$$\overline{v_{sr}} = 0 \text{ se } Fr_m = \sqrt{\frac{1}{a}} \quad (5.98)$$

$$\lim_{F_m \rightarrow \infty} \overline{v_{sr}} = \overline{v_{sr}}^\infty = \overline{v_{sr}}^0 \left( \frac{a}{b} \right) \quad (5.99)$$

Se a velocidade superficial de mistura tender a zero, o número de Froude bifásico da mistura também tenderá a zero, portanto o escorregamento será igual a  $\overline{v_{sr}}^0$ , como pode ser observado a partir da análise das Equações (5.90), (5.91) e (5.97). Como a velocidade é nula, não há componente convectiva, portanto, este escorregamento dependeria exclusivamente do empuxo projetado na direção radial (fato denunciado pela tangente da inclinação). Se o padrão de escoamento for bolhas dispersas no regime esférico, os coeficientes de arrasto seriam iguais para ambas as direções pois as bolhas são perfeitamente simétricas, logo a razão entre os coeficientes de arrasto expressa na Equação (5.91) seria igual a unidade, porém em um padrão de escoamento assimétrico como golfadas esta razão seria bem diferente da unidade, pois a área projetada e a geometria da seção da bolha de Taylor varia razoavelmente com a orientação. Por fim, se a velocidade superficial da mistura tender ao infinito, o escorregamento tenderá assintoticamente para um valor finito, representando um resultado físico ao contrário da dependência quadrática proposta por Marquez (2004).

Adicionalmente, se a velocidade superficial e consequentemente o número de Froude da mistura tenderem ao infinito, a Eficiência de separação tenderá a unidade pois todo o gás será arrastado para o *intake*, portanto os coeficientes  $a$  e  $b$  podem ser escritos para este caso:

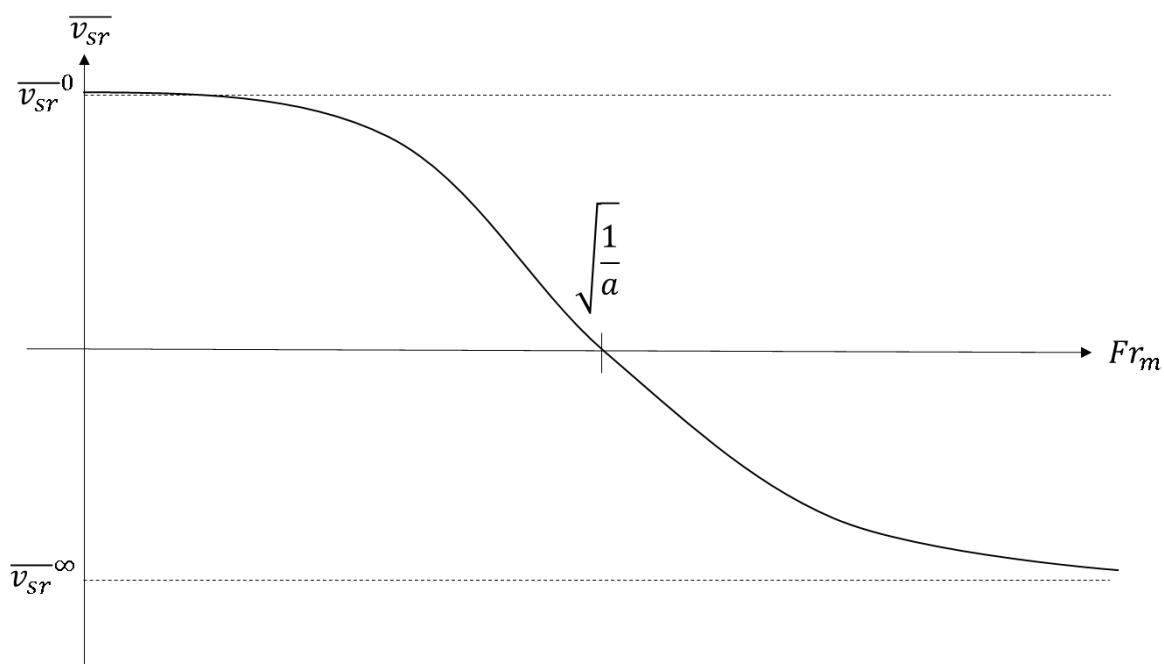
$$\lim_{F_m \rightarrow \infty} a = \left( \frac{A}{A_p} \right)^2 \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \alpha} \right)^2 (1 + \Delta C_r^\infty) \quad (5.100)$$

$$\lim_{F_m \rightarrow \infty} b = \left( \frac{D_H}{2D_p \tan \theta} \right) \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \alpha} \right)^2 (1 + \Delta C_z^\infty) \quad (5.101)$$

Desta forma, a Equação (5.99) pode ser reescrita

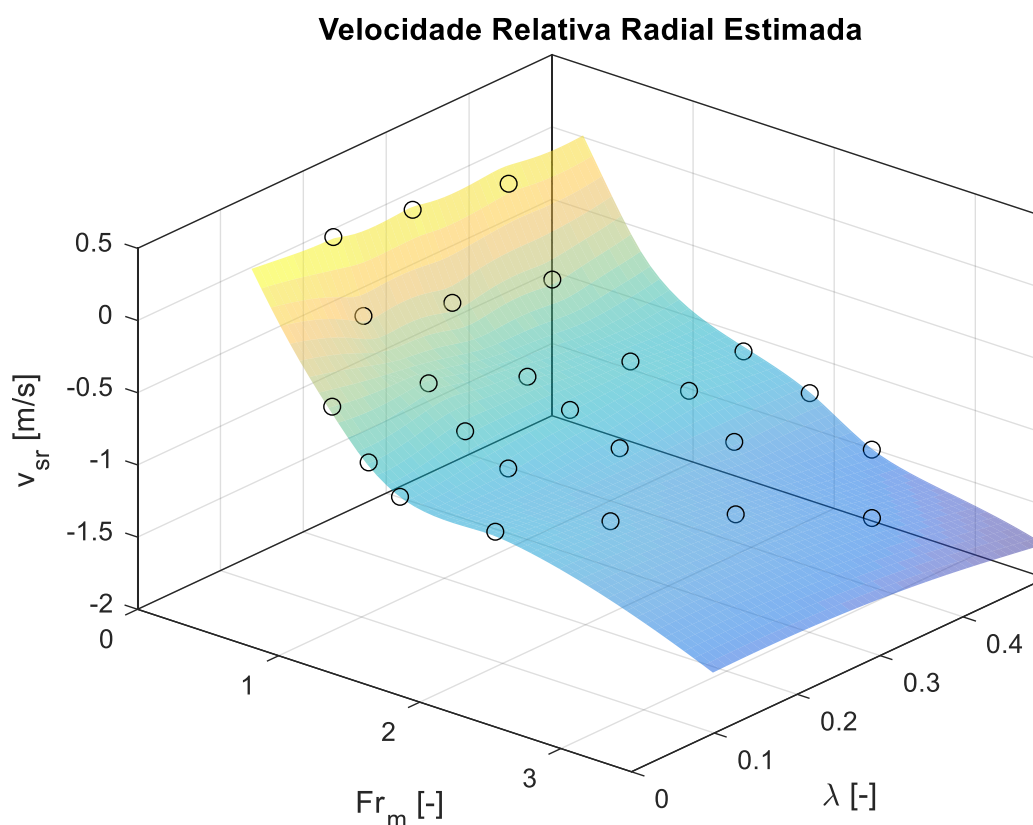
$$\overline{v_{sr}}^\infty = v_{sz} \left[ \left( \frac{A}{A_p} \right)^2 \left( \frac{2D_p}{D_H} \right) \left( \frac{C_{Az}^\infty}{C_{Ar}^\infty} \right) \left( \frac{1 + \Delta C_r^\infty}{1 + \Delta C_z^\infty} \right) \right] \quad (5.102)$$

Sumarizando o discutido acima, a dependência do escorregamento em relação ao número de Froude bifásico da mistura teria o comportamento exibido na Figura 5.7. O comportamento assintótico e a raiz exibidos nas Equações (5.97), (5.99) e (5.98) podem ser utilizados para estimar os parâmetros do modelo como uma alternativa ao método dos mínimos quadrados não linear, que será adotado neste trabalho.



**Figura 5.7** –Escorregamento radial em função da velocidade superficial da mistura.

Deve-se ressaltar que o gráfico representado na Figura 5.7, ilustra um corte de uma superfície já que o escorregamento depende do número de Froude da mistura e da fração de vazios sem escorregamento como pode ser observado nas Equações (5.90), (5.91), (5.92) e (5.93).

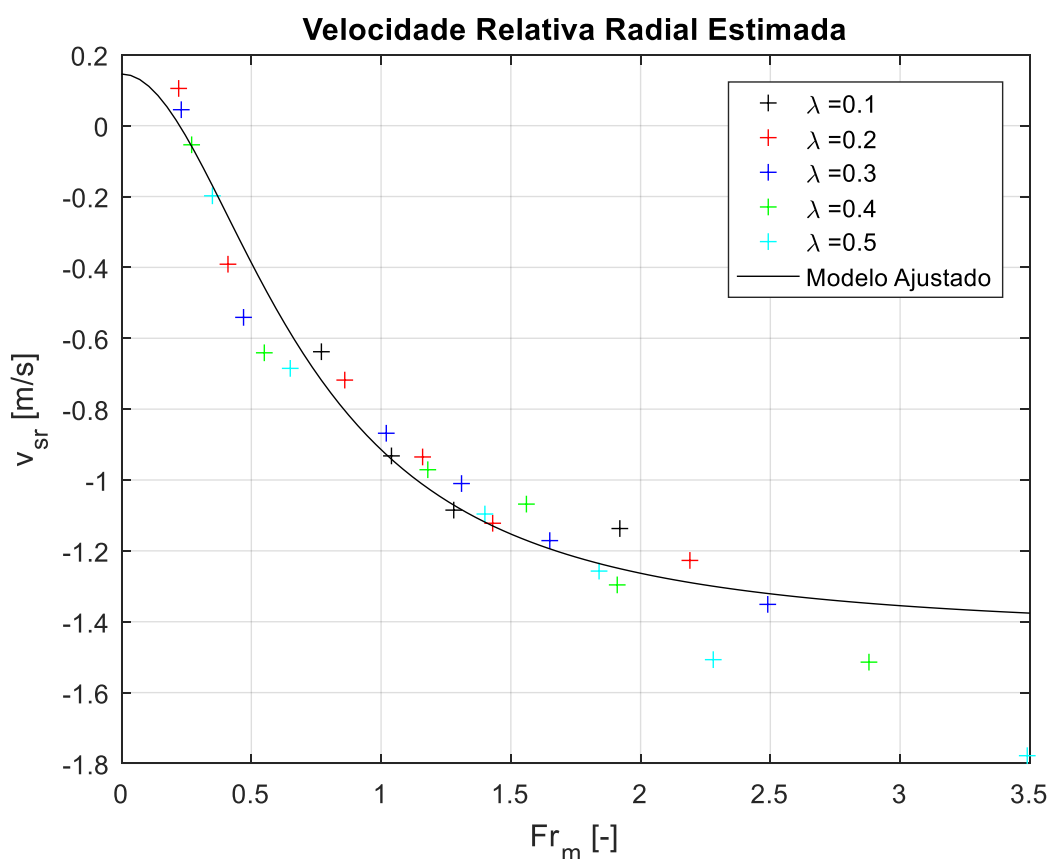


**Figura 5.8** – Escorregamento em função do número de Froude bifásico e fração de vazio

Infelizmente não há equações constitutivas disponíveis na literatura para o fechamento do modelo expresso pelas Equações (5.91), (5.92) e (5.93), que somado ao fato das equações serem transcendentais torna extremamente complexa a modelagem destes termos, restando a regressão dos dados experimentais. Como já discutido, as variáveis independentes do modelo seriam o número de Froude da mistura e a fração de vazios sem escorregamento, porém, ao observarmos os dados experimentais expressos na Figura 5.8, observa-se que a dependência em relação à fração de vazios sem escorregamento é reduzida já que os dados plotados somente em função do número de Froude da mistura já colapsam os dados experimentais em uma única curva com erro reduzido como indicado na Figura 5.5, o que sugere que os coeficientes variam pouco com a fração de vazio, tendo portanto o formato exibido na Figura 5.7 sem depender explicitamente da fração de vazios sem escorregamento.

Em virtude disso, implementou-se o método dos mínimos quadrados não linear visando estimar os coeficientes  $\overline{v_{sr}^0}$ ,  $a$  e  $b$  indicados na Tabela 5.1. O resultado final pode ser observado na Figura 5.9. Observa-se que o ajuste perde qualidade para altos números de Froude de mistura e para altas frações de vazio sem escorregamento, o que indica que a hipótese de

coeficientes constantes começa a falhar neste intervalo. Esta interpretação faz sentido pois nas Equações (5.92) e (5.93) todas as ocorrências das frações de vazio sem escorregamento são normalizadas pela fração de vazios (vice-versa), logo para baixas frações de vazio estes termos tendem à unidade.



**Figura 5.9** – Ajuste do modelo em relação aos dados experimentais

**Tabela 5.1**– Ajuste do modelo em relação aos dados experimentais

Variáveis	Ajuste
$\overline{v_{sr}}^0$	0.15 m/s
$a$	20.00
$b$	-2.03
$R^2$	0.9438

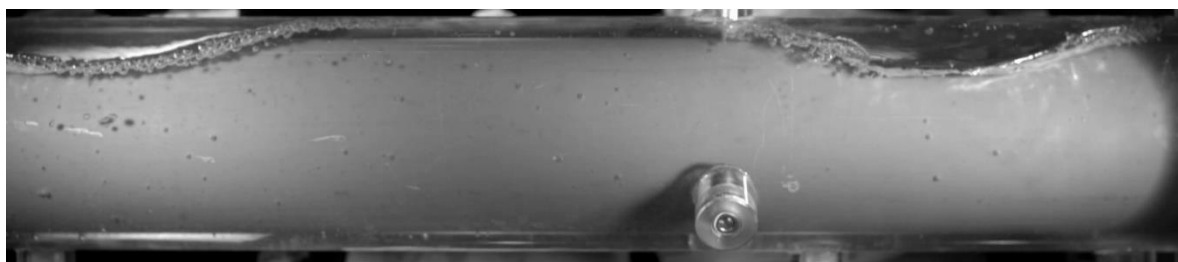
Deve-se ressaltar que a velocidade relativa não é uma grandeza medida, mas um resíduo em relação ao modelo de Alhanati (1993), ou seja, por mais que tentemos melhorar este ajuste, antes de tudo, deveríamos ter dados melhores e medidas diretas e controladas do



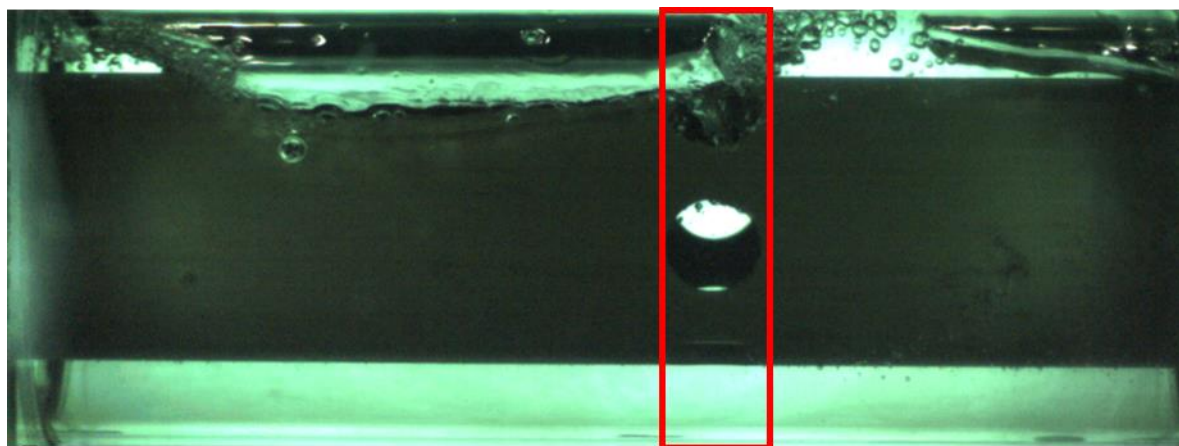
escorregamento radial. Portanto, considerando este nível de incerteza, é improdutivo continuar qualquer tentativa de melhorar este ajuste. Por fim, não faz sentido compararmos as eficiências medidas com os resultados obtidos a partir do novo modelo de escorregamento obtido, pois como trata-se de um ajuste, seria redundante.

### 5.3 Visualização do Escoamento

O processo de separação gás-líquido fica claro com a visualização do escoamento, onde percebe-se que nem todo o gás advindo do duto anular é sugado pelos furos do *intake*. Visualizou-se sequências de células unitárias com o trem de bolhas de Taylor seguidas de bolhas dispersas na esteira, arranjo clássico para o padrão intermitente, porém, ao contrário do observado por Caetano (1992) e Mendes (2012) as bolhas de Taylor não envolveram o duto interno, permanecendo concentradas no dorso do duto anular, o que seria explicado pela baixa inclinação e razão de aspecto do duto anular (CAETANO; SHOHAM; BRILL, 1992b, 1992a; MENDES, 2012). As bolhas dispersas tendem a ser sugadas com maior facilidade, enquanto as bolhas de Taylor migram para o topo, apesar de perderem massa ao passarem pelos furos do *intake*. Esta observação está alinhada com as discussões sobre balanço de forças e bolhas no escoamento.

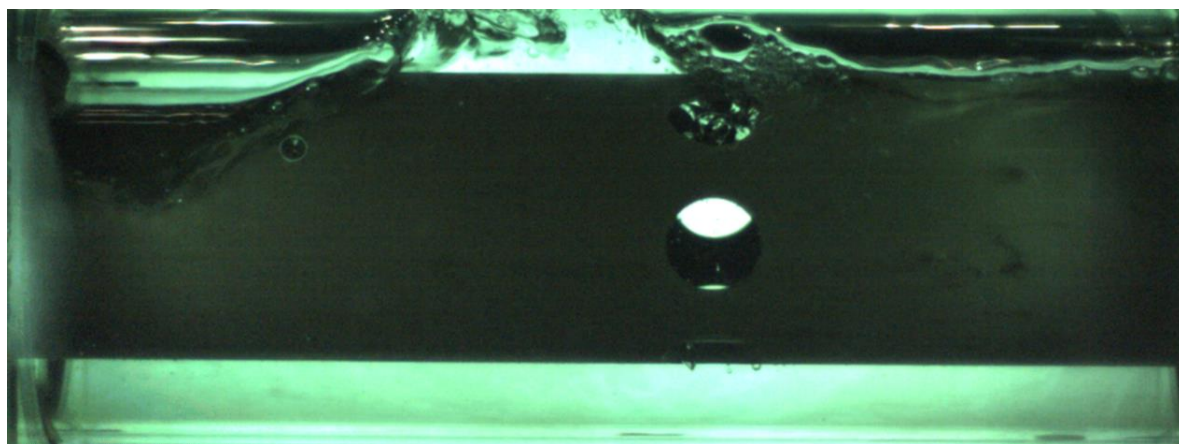


**Figura 5.10** –Escoamento no duto anular para o ponto 15 da matriz de testes (Tabela 4.1).

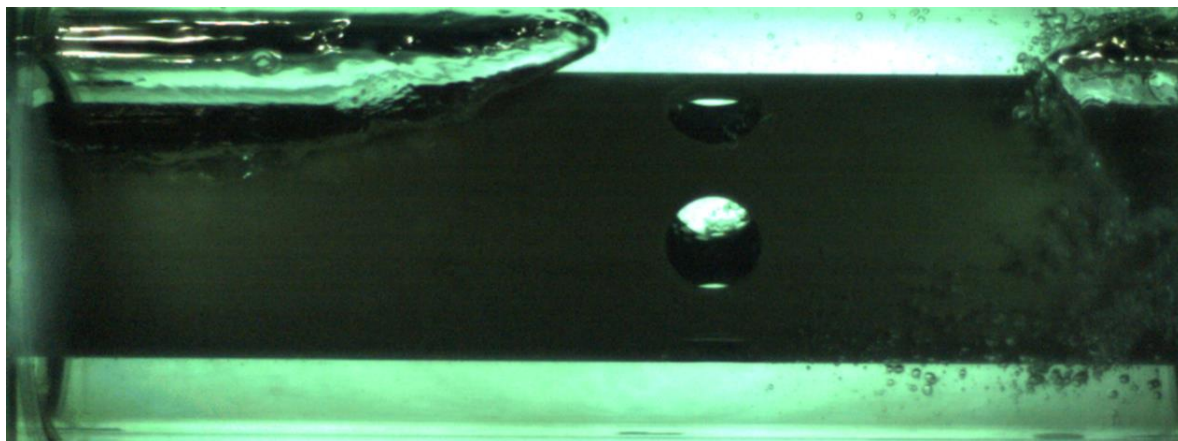


**Figura 5.11** –Escoamento no *intake* para o ponto 15 da matriz de testes (Tabela 4.1).

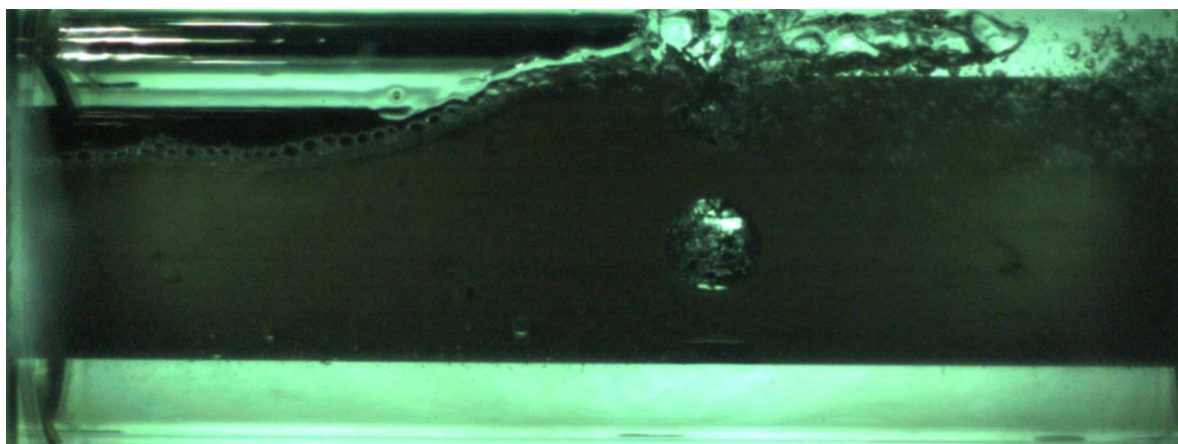
Em linhas gerais, a distribuição de fases não é axisimétrica ocorrendo majoritariamente no dorso do duto anular, o que era esperado para um escoamento bifásico intermitente próximo à horizontal. As hipóteses adotadas no desenvolvimento do modelo simplificado discutido na seção anterior contradizem esta observação, porém tratá-la em sua totalidade implica em aumentar a complexidade do modelo e adotar soluções de CFD para descrever o problema com maiores detalhes. Omitiu-se a visualização de outros pontos experimentais com conclusões similares por simplicidade.



**Figura 5.12** –Escoamento no *intake* para o ponto 4 da matriz de testes (Tabela 4.1).

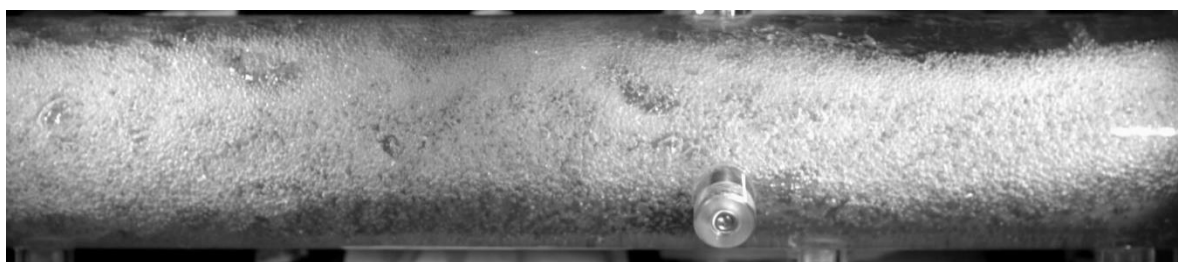


**Figura 5.13** –Escoamento no *intake* para o ponto 13 da matriz de testes (Tabela 4.1).

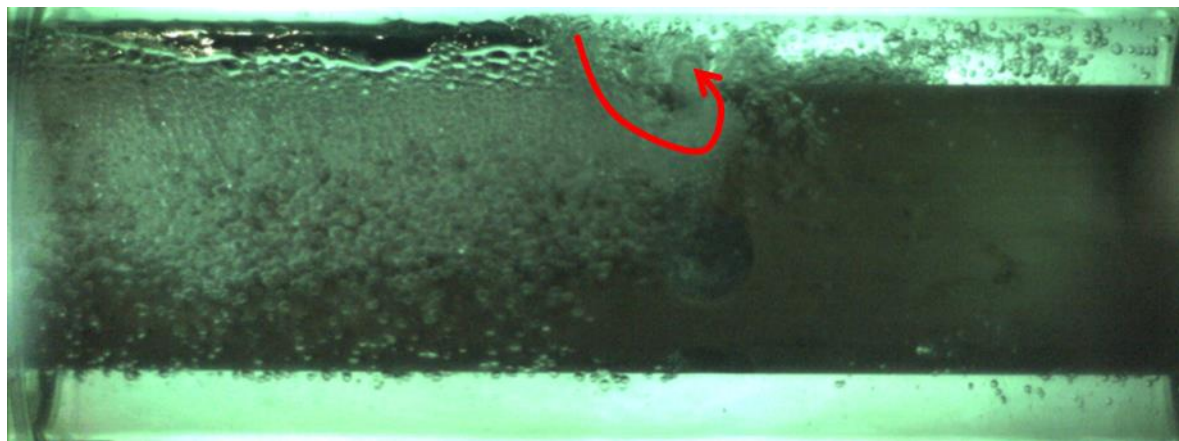


**Figura 5.14** –Escoamento no *intake* para o ponto 23 da matriz de testes (Tabela 4.1).

Para altas vazões de mistura, formou-se um enxame de bolhas que tornou a identificação da célula unitária praticamente impossível sem uma câmera de alta velocidade. Foi possível visualizar escoamentos secundários na região do *intake*, como vórtices do tipo banheira nos furos além da drenagem de bolhas que já tinham passado pelo *intake* e subiam em direção ao duto anular.



**Figura 5.15** – Escoamento no duto anular para o ponto 28 da matriz de testes (Tabela 4.1).



**Figura 5.16** –Escoamento no *intake* para o ponto 28 da matriz de testes (Tabela 4.1).

A presença de escoamentos secundários no *intake* como reportado, reforça a necessidade de avaliar o impacto destes no processo de separação a partir do uso de técnicas de CFD, o que seria demasiadamente complicado no modelo simplificado desenvolvido, ficando como sugestão para trabalhos futuros.

## 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo, as conclusões e recomendações para os trabalhos futuros serão enumeradas nas seções a seguir.

### 6.1 Conclusões

Como consequência dos resultados obtidos sobre o escoamento intermitente no duto anular e da eficiência de separação, esta dissertação obteve as seguintes conclusões:

1. Há uma lacuna na literatura sobre escoamentos bifásicos em dutos anulares na horizontal levemente inclinados;
2. O modelo de Barnea et al. (1987) adicionadas as modificações propostas por Caetano et al. (1992) para o escoamento vertical em dutos anulares, previu corretamente que todos os pontos da matriz de testes operariam no padrão intermitente como fora observado;
3. Quando adaptados para o caso horizontal levemente inclinado, os modelos existentes para o caso vertical não descreveram de forma satisfatória os parâmetros geométricos e cinemáticos da célula unitária, o que demandou uma reavaliação dos modelos;
4. Foi possível visualizar a passagem alternada da célula unitária a partir da análise das séries temporais de pressão diferencial normalizada. Esta passagem se manifesta pela elevação do envelope do sinal normalizado, o que pôde ser visualizado como um pico de energia no espectrograma. O envelope relativo à uma célula unitária se assemelha à uma gaussiana;
5. Este comportamento foi associado à onda de fração de vazios, modelada como um trem de pulsos quadrados que se propagam na velocidade da onda cinemática,

relacionando-a com a série de pressão diferencial normalizada. Essa relação foi explicitada a partir da comparação dos sinais com a função indicadora de fase estimada nas tomadas de pressão a partir do processamento das imagens obtidas;

6. Foi possível estimar a velocidade de propagação e identificar a banda de frequência onde ocorre o acoplamento entre a série de pressão diferencial normalizada e a onda de fração de vazio. Para tal, foi utilizada a fase da PSD cruzada entre os sinais de pressão diferencial obtidos;

7. Os resultados experimentais obtidos para a eficiência de separação concordam qualitativamente com o reportado pela Revisão de Literatura, porém há grandes desvios quantitativos quando comparados aos modelos revisados. Estes desvios devem-se a forma em que o escorregamento radial é considerado ou não;

8. Ao estimar-se o escorregamento radial, conclui-se que ele não é desprezível, portanto deve ser considerado. Porém, ao compará-lo com o modelo proposto por Marquez (2004), surgem inconsistências físicas, notadamente o comportamento quadrático do escorregamento em relação a velocidade superficial da fase líquida, que permite o crescimento indefinido desta, enquanto os dados experimentais evidenciam um limite assintótico para este crescimento, correspondendo fisicamente ao modelo homogêneo em vazões muito altas;

9. Este limite de crescimento do escorregamento deve-se ao acoplamento entre as acelerações convectivas verticais e radiais, pois como o momento advindo de uma direção é convertido para a outra, a aceleração convectiva radial possui um limite, que equivale ao momento doado pela desaceleração do fluido na direção vertical. Além disso, a força de *Basset* possui coeficiente negativo, o que indica que parte deste momento é dissipado. Ambas afirmações, corroboradas analiticamente, concordam com o limite assintótico visto nos dados experimentais;

## 6.2 Recomendações

Recomendam-se as seguintes atividades como trabalhos futuros:

1. Repetir os experimentos com o fluido viscoso projetado;
2. Avaliar a drenagem do gás no topo da bancada com controle de nível em tempo real. Tal arranjo levaria a medição da eficiência instantânea de separação, ao contrário da eficiência média, como feito neste trabalho;
3. Obtenção de mais dados experimentais da velocidade de ascensão da bolha de Taylor em diferentes inclinações e razões de aspecto para permitir a regressão do coeficiente que multiplica o fator de forma para o número de Froude bifásico na componente horizontal do modelo de Hasan e Kabir (1992);
4. Aprimorar a proposta de modelo para a frequência da célula unitária com uma melhor aproximação da razão entre os comprimentos da bolha de Taylor e da célula unitária;
5. Quantificar o processo de atraso e atenuação relativos à FRF entre as ondas de pressão e fração de vazios. Pode-se usar uma sonda capacitiva para estimar a fração de vazios ou aprimorar o algoritmo de processamento de imagens desenvolvido neste trabalho;
6. Avaliar o comportamento estocástico dos parâmetros da célula unitária modelando as ondas de fração de vazio como um processo telegráfico;
7. Utilizar técnicas de processamento de sinais no tempo e frequência como *Wavelets* e Transformada de *Hilbert* para a análise das fases e frequências instantâneas dos sinais de pressão diferencial normalizados. Esta tarefa é demasiadamente importante, pois fora observado que os sinais de pressão diferencial normalizados não são estacionários;



8. Incluir a distribuição azimutal de parâmetros de escoamento no modelo de separação natural;
9. Estudar a relação dos coeficientes de arrasto, massa adicionada e *Basset* nas direções radiais e axiais do modelo de escorregamento desenvolvido em relação à inclinação, razão de aspecto e considerando o fluido viscoso projetado;
10. Avaliar os efeitos dos escoamentos secundários no *intake* no processo de separação a partir do uso de técnicas de CFD;

Este trabalho iniciou um esforço para tratar as instabilidades geradas pela segregação de fluidos no sistema de *boosting* SKID BCSS. Para tal, focou-se na caracterização da segregação de fluidos no *intake* e do escoamento intermitente no duto anular à montante. Porém, o objetivo central do projeto de pesquisa que este trabalho integra é dimensionar o SKID BCSS de forma que evite tais fenômenos, ou seja, que o escoamento à montante seja o mais disperso possível e que a segregação de fluidos seja minimizada. Neste sentido, apesar de maiores investigações serem demandadas em trabalhos futuros, recomenda-se:

1. O diâmetro hidráulico e a inclinação do duto anular devem ser projetados para que o padrão de escoamento à montante do *intake* não seja intermitente, como indicado na Figura 3.6.
2. Com o intuito de minimizar a segregação de fluidos, o diâmetro hidráulico e a inclinação do duto anular devem ser projetados para que o escoamento seja supercrítico, ou seja, com o número de Froude da mistura bifásico superior a unidade. Caso contrário, a eficiência de separação cresceria exponencialmente, como indicado na Figura 5.2, intensificando a segregação de fluidos.
3. Como a distribuição da fase gasosa não é axisimétrica ao longo do duto anular, as aberturas do *intake* no perímetro do duto interno devem ser desuniformes similarmente, ou seja, aberturas de maior diâmetro ou em maiores quantidades na região dorsal do duto interno onde se concentra a fase gasosa, evitando assim a segregação e acúmulo de gás no topo. Outra alternativa seria desenhar a orientação dos furos do *intake* de forma a induzirem um escoamento com giro



na direção azimutal, gerando, desta forma, um campo centrífugo que arrastaria a fase gasosa em direção aos furos do *intake*.

4. Visando evitar o acúmulo de gás no topo, deve-se avaliar a instalação de um *packer* à jusante do *intake*, isolando o volume morto no topo do duto anular.
5. A excentricidade tende a aumentar a segregação entre as fases no escoamento bifásico em dutos anulares, portanto, deve ser evitada no caso do SKID BCSS (CAETANO; SHOHAM; BRILL, 1992b, 1992a).
6. Os furos do *intake* podem possuir um perfil interno que remonte a um tubo venturi, para atuarem de forma similar à um *bubble braker* entregando à BCSS um escoamento disperso.

## 7 REFERÊNCIAS

ALHANATI, F. J. S. **Bottomhole gas separation efficiency in electrical submersible pump installations**. The University of Tulsa, 1993.

ALHANATI, F. J. S. et al. A Simple Model for the Efficiency of Rotary Separators. **Proceedings of SPE Annual Technical Conference and Exhibition**, p. 67–82, 1994.

ARRUDA, J. R. DE F.; HUALLPA, B. N. **Análise Espectral de Sinais e Sistemas Mecânicos Lineares**. 1st. ed. Campinas: Unicamp, 2008.

BARNEA, D. A unified model for predicting transitions for the whole pipe inclinations. **Int. J. Multiphase Flow Vol.**, v. 13, n. I, p. 1–12, 1987.

BENDIKSEN, K. H. An experimental investigation of the motion of long bubbles in inclined tubes. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 10, n. 4, p. 467–483, 1 ago. 1984.

BERGLES, A. E. et al. **Two-phase flow and heat transfer in the power and process industries**. Hemisphere Pub. Corp, 1981.

CAETANO, E. F.; SHOHAM, O.; BRILL, J. P. Upward Vertical Two-Phase Flow Through an Annulus—Part II: Modeling Bubble, Slug, and Annular Flow. **Journal of Energy Resources Technology**, v. 114, n. 1, p. 14, 1992a.

CAETANO, E. F.; SHOHAM, O.; BRILL, J. P. upward vertical two phase flow through an annulus. part I.pdf. v. 114, n. March, p. 1–13, 1992b.

CAI, Y.; WAMBSGANSS, M.; JENDRZEJCZYK, J. Application of chaos theory in identification of two-phase flow patterns and transitions in a small, horizontal, rectangular channel. **Journal of fluids engineering**, v. 118, n. 2, p. 383–390, 1996.

CENTRAL DO ACRILICO. **Central do Acrílico**. Disponível em: <<http://www.centraldoacrilico.com.br/produtos/tubos-de-acrilico>>. Acesso em: 20 maio. 2018.

CLIFT, R.; GRACE, J. R.; WEBER, M. E. **Bubbles, drops, and particles**. 1st. ed. New York: Academic Press, 1978.

COSTA, B. M. P.; OLIVEIRA, P. D. S.; ROBERTO, M. A. R. Mudline ESP: Elettrical Submersible Pump Installed in a Subsea Skid. **Offshore Technology Conference**, p. 1–10, 2013.

DAUN, L. G. **Estudo Experimental da Garantia de Escoamento em Curvas Horizontais Descendentes e Aplicação à Operação de um S-BCSS**. Universidade Estadual de Campinas, 2013.

DING, H. et al. Hilbert-Huang transform based signal analysis for the characterization of gas-liquid two-phase flow. **Flow Measurement and Instrumentation**, v. 18, n. 1, p. 37–46, 2007.

DRAHOŠ, J. et al. Characterization of hydrodynamic regimes in horizontal two-phase flow. Part II: Analysis of wall pressure fluctuations. **Chemical Engineering and Processing**, v. 22, n. 1, p. 45–52, 1987.

DRAHOŠ, J.; ČERMÁK, J. Diagnostics of gas—liquid flow patterns in chemical engineering systems. **Chemical Engineering and Processing: Process Intensification**, v. 26, n. 2, p. 147–164, 1989.

EBNER, L. et al. Characterization of hydrodynamic regimes in horizontal two-phase flow Part I: Pressure drop measurements. **Chemical Engineering and Processing**, v. 22, n. 1, p. 39–43, 1987.

ELPERIN, T.; KLOCHKO, M. Flow regime identification in a two-phase flow using wavelet transform. **Experiments in Fluids**, v. 32, n. 6, p. 674–682, 2002.

ESTEVAM, V. **Uma Análise Fenomenológica da Operação de Bomba Centrífuga com Escoamento Bifásico**. Unicamp, 2002.

FABRE, J.; LINE, A.; PERESSON, L. Two-Fluid Two-Flow-Pattern Model for Transient Gas-

Liquid Flow in Pipes. **Proc. 4th Int. Conf. Multi-Phase Flow**, n. JANUARY 1989, p. 269–284, 1989.

FRANCA, F. et al. The use of fractal techniques for flow regime identification. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 17, n. 4, p. 545–552, 1991.

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E.; EDDINS, S. L. **Digital Image Processing Using Matlab**. 1st. ed. New Jersey: Princeton Hall Pearson Education Inc., 2004.

GREGORY, G. A.; SCOTT, D. S. Correlation of liquid slug velocity and frequency in horizontal cocurrent gas-liquid slug flow. **AIChE Journal**, v. 15, n. 6, p. 933–935, 1969.

GRIFFITH, P.; SNYDER, G. A. **The bubbly-slug transition in a high velocity two phase flow**. Cambridge, Massachusetts. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1721.1/61488>>.

GROTH, A.; GHIL, M. Monte Carlo singular spectrum analysis (SSA) revisited: Detecting oscillator clusters in multivariate datasets. **Journal of Climate**, v. 28, n. 19, p. 7873–7893, 2015.

HAN, Y. F. et al. Differential pressure method for measuring water holdup of oil-water two-phase flow with low velocity and high water-cut. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 72, p. 197–209, 2016.

HARMATHY, T. Z. Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent. **AIChE Journal**, v. 6, n. 2, p. 281–288, jun. 1960.

HARUN, A. F. **The Effect of Inducer Performance on the Efficiency of the ESP Rotary Gas Separator**. The University of Tulsa, 1999.

HARUN, A. F. et al. A Mechanistic Model To Predict Natural Gas Separation Efficiency in Inclined Pumping Wells. **SPE Production and Operations Symposium**, 2001.

HARUN, A. F. et al. A simple model to predict natural gas separation efficiency in pumped wells. **Spe Production & Facilities**, v. 18, n. 1, p. 5–12, 2003.

HASAN, A. R.; KABIR, C. S. Two-phase flow in vertical and inclined annuli. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 18, n. 2, p. 279–293, 1992.

HINZE, J. O. Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of splitting in dispersion processes. **AIChE Journal**, v. 1, n. 3, p. 289–295, set. 1955.

ISHII, M.; HIBIKI, T. **Thermo-fluid dynamics of two-phase flow**. Springer, 2011.

ISHII, M.; ZUBER, N. Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows. **AIChE Journal**, v. 25, n. 5, p. 843–855, 1979.

LEA, J. F.; BEARDEN, J. L. Gas Separator Performance for Submersible Pump Operation. **Journal of Petroleum Technology**, v. 34, n. 06, p. 1327–1333, 1 jun. 1982a.

LEA, J. F.; BEARDEN, J. L. Effect of Gaseous Fluids on Submersible Pump Performance. **Journal of Petroleum Technology**, v. 34, n. 12, p. 2922–2930, 1 dez. 1982b.

LI, H. et al. Analysis of dynamic of two-phase flow in small channel based on phase space reconstruction combined with data reduction sub-frequency band wavelet. **Chinese Journal of Chemical Engineering**, v. 23, n. 6, p. 1017–1026, 2015.

LI, H. W. et al. Flow pattern map and time-frequency spectrum characteristics of nitrogen-water two-phase flow in small vertical upward noncircular channels. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 54, p. 47–60, 2014.

LIU, B. **Modeling Down-hole Natural Separation Using Bubble Tracking Method**. The University of Tulsa, 2002.

LIU, B.; PRADO, M. Implementation of Bubble Tracking Method for Modeling Natural Separation Efficiency. **Technical Report TR-11, Artificial Lift Projects-TUALP, University of Tulsa, Tulsa, OK**, v. 127, n. November 2005, p. 479–486, 2001.

MARQUEZ, R. **Modeling Downhole Natural Separation**. The University of Tulsa, 2004.

MARQUEZ, R.; PRADO, M. A new robust model for natural separation efficiency. **Spe Production and Operations Symposium**, 2003.

MATSUI, G. Identification of flow regimes in vertical gas-liquid two-phase flow using differential pressure fluctuations. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 10, n. 6, p. 711–719, 1984.

MATSUI, G. Automatic identification of flow regimes in vertical two-phase flow using differential pressure fluctuations. **Nuclear Engineering and Design**, v. 95, n. C, p. 221–231, 1986.

MENDES, F. A. A. **Estudo experimental, simulação numérica e modelagem fenomenológica da separação gravitacional de gás no fundo de poços direcionais**. Universidade de São Paulo, 2012.

MONTE VERDE, W. **Estudo Experimental de Bombas de BCS Operando com Escoamento Bifásico Gás-Líquido**. Unicamp, 2011.

NICKLIN, D. J. Two-phase bubble flow. **Chemical Engineering Science**, v. 17, n. 9, p. 693–702, 1962.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Digital signal processing**. Prentice-Hall, 1975.

PANTON, R. L. **Incompressible Flow**. 4th. ed. New Jersey: Wiley, 2013.

PAPOULIS, ATHANASIOS; PILLAI, S. U. **Probability, random variables, and stochastic processes**. 4th. ed. New York: McGraw-Hill, 2002.

PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. G. **Digital signal processing**. Pearson Prentice Hall, 2007.

ROUSSEEUW, P. J.; CROUX, C. Alternatives to the median absolute deviation. **Journal of the American Statistical Association**, v. 88, n. 424, p. 1273–1283, 1993.

SADATOMI, M.; SATO, Y.; SARUWATARI, S. Two-phase flow in vertical noncircular channels. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 8, n. 6, p. 641–655, 1982.

SCHMID, P. J.; HENNINGSON, D. S. **Stability and transition in shear flows**. Springer, 2001.

SEGUR, J. Physical properties of glycerol and its solutions. **Aciscience.Org**, p. 1–27, 1953.

SHIN, K.; HAMMOND, J. K. **Fundamentals of signal processing for sound and vibration engineers**. John Wiley & Sons, 2008.

SHOHAM, O. **Mechanistic modeling of gas-Liquid Two-phase Flow in Pipes**. Society of Petroleum Engineers, 2005.

SILVA, L. C. T. **Simulação Numérica de Poço Alojador de Bombeio**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

TAITEL, Y.; BARNEA, D. Two-Phase Slug Flow. **Advances in Heat Transfer**, v. 20, n. C, p. 83–132, 1990.

TAITEL, Y.; BARNEA, D.; DUKLER, A. Modelling Flow Pattern Transitions for Steady Upward Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes. **AIChE Journal**, v. 26, n. 3, p. 345–354, 1980.

TARCHA, B. A. et al. Subsea ESP Skid Production System for Jubarte Field. **Offshore Technology Conference**, 2016.

TEIXEIRA, V. et al. Characterization and analysis of fluid dynamic instabilities on a subsea pumping module. **BHR Conference Paper**, p. 449–463, 2014.

VIEIRA, R. A. D. M. **Flow Dynamics in Oil Wells**. The University of Tulsa, 2011.

VILORIA, J. C. S. **Natural Separation Efficiency in Electric Submersible Pump Systems**. The University of Tulsa, 1999.

WALLIS, G. B. **One-Dimensional Two-Phase Flow**. McGraw-Hill Book Company, 1969.

WHITE, F. M. **Fluid mechanics**. 4th. ed. McGraw-Hill Book Company, 1998.

WHITE, F. M. **Viscous Fluid Flow**. 2nd. ed. McGraw-Hill, 2006.

ZABARAS, G. J. Prediction of Slug Frequency for Gas/Liquid Flows. **SPE Journal**, v. 5, n. 03, p. 252–258, 2000.

ZUBER, N. On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime. **Chemical Engineering Science**, v. 19, n. 11, p. 897–917, 1964.



## APÊNDICE A. MODELO DE MISTURA

A partir da aplicação das leis de conservação de massa e momento linear para as propriedades médias na seção de um duto temos (BERGLES et al., 1981; ISHII; HIBIKI, 2011):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k \rho_k v_k) = \Gamma_k \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k v_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k \rho_k v_k v_k) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \alpha_k \rho_k g \sin \theta + M_k + F_k \quad (\text{A.2})$$

Onde o índice  $k$  representa a fase (1 para o gás e 2 para o líquido),  $\alpha$  a fração de vazio,  $\rho$  a massa específica,  $v$  a velocidade e  $p$  a pressão. Se a transferência de massa entre as fases  $\Gamma_k$  for desprezada (sem mudança de fases) e considerarmos a equação de momento para a mistura a partir da soma da equação de momento para cada fase, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 v_1) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \rho_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 \rho_2 v_2) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 v_1^2 + \alpha_2 \rho_2 v_2^2 + p) = -\rho_m g \sin \theta + (F_1 + F_2) \quad (\text{A.5})$$

A vantagem em somar as equações de momento reside no fato da transferência de momento entre as fases  $M_k$  possuir o mesmo módulo com sinais trocados (o momento cedido por uma fase é recebido por outra), termo complexo de modelar que é cancelado na formulação após a soma.

$$M_1 + M_2 = 0 \quad (\text{A.6})$$

## APÊNDICE A.1 Onda Cinemática

A velocidade de propagação da onda cinemática ou de continuidade pode ser obtida a partir da Equação da Conservação da Massa (A.4) para fluidos incompressíveis escrita para a fase gasosa (WALLIS, 1969):

$$\rho_2 \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial x} \overbrace{(\alpha v_2)}^{j_2} = 0 \quad (\text{A.7})$$

A partir da regra da cadeia, reescreve-se a Equação (A.7) no formato de uma equação do tipo onda:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \overbrace{\frac{\partial j_2}{\partial x}}^{V_w} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + V_w \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Onde define-se a velocidade da onda cinemática  $V_w$  como:

$$V_w = \frac{\partial j_2}{\partial \alpha} \quad (\text{A.10})$$

A velocidade da onda cinemática  $V_w$  se iguala à velocidade da fase gasosa in situ se  $C_0$  e  $\tilde{V}_{2J}$  forem constantes em relação à  $\alpha$ , premissa verdadeira para os modelos para o padrão intermitente listados na Revisão Bibliográfica:

$$V_w = \frac{\partial j_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha (C_0 J + \tilde{V}_{2J})] = C_0 J + \tilde{V}_{2J} = v_2 \quad (\text{A.11})$$

## APÊNDICE A.2 Equações de Transporte Linearizadas

A partir do modelo de dois fluidos expresso pela Equação (A.1), considerando os fluidos incompressíveis (somente aplicável à baixas pressões e velocidades), temos para a conservação de massa da fase líquida:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} - (1 - \alpha) \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Para a fase gasosa:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Para o momento linear da mistura dado pela Equação (A.5):

$$\begin{aligned} \rho_1(1 - \alpha) \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho_2 \alpha \frac{\partial v_2}{\partial t} + \rho_1(1 - \alpha) v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \rho_2 \alpha v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ = - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_m g \sin \theta - F_w \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

As equações (A.12), (A.13) e (A.14) serão linearizadas para perturbações de pequena amplitude a partir dos estados base. Seja (SCHMID; HENNINGSON, 2001; WALLIS, 1969):

$$\alpha = \bar{\alpha} + \alpha' \cong \bar{\alpha} \quad (\text{A.15})$$

$$v_1 = \bar{v}_1 + v'_1 \cong \bar{v}_1 \quad (\text{A.16})$$

$$v_2 = \bar{v}_2 + v'_2 \cong \bar{v}_2 \quad (\text{A.17})$$

$$p = \bar{p} + p' \cong \bar{p} \quad (\text{A.18})$$

Por definição, o estado base é uma solução para o sistema de equações em regime permanente, o escoamento é desenvolvido e os termos de alta ordem serão desprezados (hipótese de pequena amplitude para estabilidade linear). Somente para fim de notação, os termos do estado base serão marcados como nulos e serão eliminados, já que conjuntamente são nulos por serem solução das equações.

Substituindo as Equações (A.15) e (A.16) na Equação (A.12) e considerando as hipóteses supracitadas, a lei da conservação da massa para a fase líquida fica:

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \alpha'}{\partial x} - (1 - \bar{\alpha}) \frac{\partial v'_1}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.19})$$

Substituindo as Equações (A.15) e (A.17) na Equação (A.13) e considerando as hipóteses supracitadas, a lei da conservação da massa para a fase gasosa fica:

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \bar{v}_2 \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial v'_2}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.20})$$

Substituindo as Equações (A.15), (A.16), (A.17) e (A.18) na Equação (A.14) e considerando as hipóteses supracitadas, a lei da conservação para o momento da mistura fica (lado esquerdo da Equação (A.14) relativa à fase líquida):

$$\rho_1 (1 - \bar{\alpha}) \left( \frac{\partial v'_1}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial v'_1}{\partial x} \right) \quad (\text{A.21})$$

O lado esquerdo da Equação (A.14) relativa à fase gasosa:

$$\rho_2 \bar{\alpha} \left( \frac{\partial v'_2}{\partial t} + \bar{v}_2 \frac{\partial v'_2}{\partial x} \right) \quad (\text{A.22})$$

O lado direito da Equação (A.14) relativa aos termos fonte:

$$-\frac{\partial p'}{\partial x} - \alpha' \Delta \rho g \sin \theta - \frac{4}{D} C_f \bar{\rho}_m \bar{J}_m [(1 - \bar{\alpha}) v'_1 + \bar{\alpha} v'_2 + \alpha' \bar{v}_s] - \frac{2}{D} C_f \alpha' \Delta \rho \bar{J}_m^2 \quad (\text{A.23})$$

Unindo as equações (A.21), (A.22) e (A.23), a lei da conservação para o momento da mistura fica:

$$\begin{aligned} \rho_1(1 - \bar{\alpha}) \left( \frac{\partial v'_1}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial v'_1}{\partial x} \right) + \rho_2 \bar{\alpha} \left( \frac{\partial v'_2}{\partial t} + \bar{v}_2 \frac{\partial v'_2}{\partial x} \right) \\ = - \frac{\partial p'}{\partial x} - \alpha' \left( \Delta \rho g \sin \theta + \frac{4}{D} C_f \bar{\rho}_m \bar{J}_m \bar{v}_s + \frac{2}{D} C_f \Delta \rho_{21} \bar{J}_m^2 \right) \\ - \frac{4}{D} C_f \bar{\rho}_m \bar{J}_m [(1 - \bar{\alpha}) v'_1 + \bar{\alpha} v'_2] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

### APÊNDICE A.3 Acoplamento entre as flutuações de fração de vazio e de pressão

As Equações (A.19), (A.20) e (A.24) constituem um sistema de 3 equações e 4 incógnitas, sendo necessário para seu fechamento o uso de uma relação cinemática que associe as velocidades das fases. Pode-se usar o modelo de mistura, mas por enquanto isso não é necessário pois é possível desacoplar as equações e escrever o sistema de equações como uma EDP associando as perturbações na fração de vazio com as de pressão como desejado. Para tal, temos de derivar no espaço a Equação (A.24) de conservação do momento da mistura, as derivadas de segunda ordem das velocidades serão obtidas a partir das Equações (A.19) e (A.20) de conservação da massa para as fases líquida e gasosa, isolando os termos das velocidades das fases e aplicando as derivadas. As derivadas da velocidade da fase líquida são obtidas a partir da (A.19):

$$\frac{\partial v'_1}{\partial x} = \frac{1}{(1 - \bar{\alpha})} \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \frac{\bar{v}_1}{(1 - \bar{\alpha})} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial^2 v'_1}{\partial x^2} = \frac{1}{(1 - \bar{\alpha})} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t \partial x} + \frac{\bar{v}_1}{(1 - \bar{\alpha})} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial^2 v'_1}{\partial x \partial t} = \frac{1}{(1 - \bar{\alpha})} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + \frac{\bar{v}_1}{(1 - \bar{\alpha})} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x \partial t} \quad (\text{A.27})$$

As derivadas da velocidade da fase gasosa são obtidas a partir da Equação (A.20):

$$\frac{\partial v'_2}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \alpha'}{\partial t} - \frac{\bar{v}_2}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial^2 v'_2}{\partial x^2} = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t \partial x} - \frac{\bar{v}_2}{\bar{\alpha}} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial^2 v'_2}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} - \frac{\bar{v}_2}{\bar{\alpha}} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x \partial t} \quad (\text{A.30})$$

Diferencia-se a Equação (A.24) da conservação do momento em relação ao espaço:

$$\begin{aligned} \rho_1(1 - \bar{\alpha}) \left( \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x \partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x^2} \right) + \rho_2 \bar{\alpha} \left( \frac{\partial^2 v'_2}{\partial x \partial t} + \bar{v}_2 \frac{\partial^2 v'_2}{\partial x^2} \right) \\ = -\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \left( \Delta \rho g \sin \theta + \frac{2}{D} C_f \Delta \rho_{21} \bar{J}_m^2 + \frac{4}{D} C_f \bar{\rho}_m \bar{J}_m \bar{v}_s \right) \\ - \frac{4}{D} C_f \bar{\rho}_m \bar{J}_m (1 - \bar{\alpha}) \frac{\partial v'_1}{\partial x} - \frac{4}{D} C_f \bar{\rho}_m \bar{J}_m \bar{\alpha} \frac{\partial v'_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Substituindo as Equações (A.25), (A.26), (A.27), (A.28), (A.29) e (A.30) na Equação (A.31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + \left[ 2 \frac{(\rho_1 \bar{v}_1 - \rho_2 \bar{v}_2)}{\Delta \rho} \right] \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t \partial x} + \left[ \frac{(\rho_1 \bar{v}_1^2 - \rho_2 \bar{v}_2^2)}{\Delta \rho} \right] \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} \\ - \left( g \sin \theta + \frac{2}{D} C_f \bar{J}_m^2 \right) \frac{\partial \alpha'}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta \rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

A Equação (A.32) pode ser reescrita:

$$\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + C \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t \partial x} + D \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} + E \frac{\partial \alpha'}{\partial x} = F \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad (\text{A.33})$$

Onde:

$$C = 2 \frac{(\rho_1 \bar{v}_1 - \rho_2 \bar{v}_2)}{\Delta \rho} \quad (\text{A.34})$$

$$D = \frac{(\rho_1 \bar{v}_1^2 - \rho_2 \bar{v}_2^2)}{\Delta \rho} \quad (\text{A.35})$$

$$E = -g \sin \theta - \frac{2}{D} C_f \bar{J}_m^2 \quad (\text{A.36})$$

$$F = -\frac{1}{\Delta \rho} \quad (\text{A.37})$$

A Equação (A.33) é uma EDP Linear com coeficientes C, D, E e F constantes que dependem de parâmetros PVT e do escoamento base. O coeficiente C remete à relação entre escorregamento de momento e empuxo, enquanto que D remete à relação do escorregamento de energia cinética com o empuxo, E remete ao gradiente da pressão médio que desacelera o fluido como um todo enquanto que F remete ao empuxo. Sumarizando, como já sabido qualitativamente, o que modula a alteração da fração de vazios é o escorregamento, empuxo e a desaceleração da mistura. Se considerarmos uma expansão modal para a fração de vazio como expresso pela Equação (4.2) e para a pressão na Equação (A.38), a Equação (A.33) pode ser reescrita no espaço de número de onda:

$$p' = \sum_n P_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} \quad (\text{A.38})$$

Ao substituir as Equações (4.2) e (A.38) na Equação (A.33):

$$(-\omega_n^2 + C k_n \omega_n - D k_n^2 + i E k_n) A_n = -F k_n^2 P_n \quad (\text{A.39})$$

A Equação (A.39) pode ser reescrita:

$$\frac{P_n}{A_n} = \left( \frac{1}{F} c_p^2 - \frac{C}{F} c_p + \frac{D}{F} - i \frac{E}{F k_n} \right) \quad (\text{A.40})$$

A partir dos resultados expressos na Seção 4 a partir das Equações (4.8) e (4.13), pode-se reescrever a Equação (A.40):

$$\frac{P_n}{A_n} = \left( \frac{1}{F} V_{TB}^2 - \frac{C}{F} V_{TB} + \frac{D}{F} - i \frac{EL_u}{Fn2\pi} \right) \quad (\text{A.41})$$

Apesar de não estarem disponíveis todas as informações necessárias para a determinação dos parâmetros da Equação (A.41), pode-se entender que uma vez que a onda de fração de vazios for periódica, a onda de pressão também será, ou melhor, terá uma componente relativa à fração de vazios que também será, além disso pode-se entender que a Equação (A.41) representa uma FRF com magnitude e fase que proporcionarão amplificação ou atenuação de determinados modos de onda além de imputa-los um atraso, que dependem exclusivamente de parâmetros de escoamento.

O resultado expresso na Equação (A.33) e na Equação (A.41) indica o acoplamento entre as ondas de pressão e fração de vazio, portanto é de se esperar que a onda cinemática esteja presente também na onda de pressão e não somente a componente sônica.

#### **APÊNDICE A.4      Velocidade da onda de fração de vazio**

Até aqui trabalhou-se a relação entre as flutuações de pressão e as ondas de propagação de fração de vazio, porém ainda resta estimar a velocidade de propagação das ondas de frações de vazios. Há na literatura abordagens similares, onde cancela-se a influência da flutuação de pressão subtraindo as equações de momento para as fases ao invés de soma-las como fora feito no APÊNDICE A.2, porém utilizando o modelo dos cilindros paralelos e deixando em aberto as expressões para as forças de fricção e transferência de momento entre as fases (WALLIS, 1969). A vantagem da abordagem adotada no APÊNDICE A.2 é que além de cancelar analiticamente a transferência de momento entre as fases, sendo que só há algumas referências na literatura de como se modelar aproximadamente para alguns padrões (fases separadas – estratificado e anular), utiliza-se o modelo consagrado de fricção global da mistura com a parede do duto.

Nesse sentido, é feita uma abordagem similar (WALLIS, 1969), porém utilizando o modelo de mistura (ISHII; HIBIKI, 2011). Fazendo a subtração das Equações (A.2) de momento entre as fases, segue na forma não conservativa:



$$\begin{aligned} \rho_1(1-\alpha)\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) - \rho_2\alpha\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) \\ = \overbrace{-(1-\alpha)\rho_1 - \alpha\rho_2]g \sin \theta + (F_w^1 - F_w^2 + M_1 - M_2)}^f \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\rho_1(1-\alpha)\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) - \rho_2\alpha\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) = f \quad (\text{A.43})$$

O termo  $f$  representa a diferença entre as fases para as forças de corpo como a gravidade, do atrito líquido com a parede e para a transferência de momento, sendo uma função das velocidades de cada fase, da fração de vazios, da variação espacial da fração de vazios, dentre outras variáveis (WALLIS, 1969).

$$f = f\left(v_1, v_2, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial x}, etc\right) \quad (\text{A.44})$$

Considerando perturbações de pequena amplitude entorno do estado base através das Equações (A.15), (A.16), (A.17) e (A.18) e substituindo na Equação (A.43)(similar à Equação (A.24))(SCHMID; HENNINGSON, 2001; WALLIS, 1969):

$$\rho_1(1-\bar{\alpha})\left(\frac{\partial v'_1}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial v'_1}{\partial x}\right) - \rho_2\bar{\alpha}\left(\frac{\partial v'_2}{\partial t} + \bar{v}_2 \frac{\partial v'_2}{\partial x}\right) = f' \quad (\text{A.45})$$

Calculando a derivada espacial da Equação (A.45) como um todo (similar à Equação (A.31)):

$$\rho_1(1-\bar{\alpha})\left(\frac{\partial^2 v'_1}{\partial x \partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x^2}\right) - \rho_2\bar{\alpha}\left(\frac{\partial^2 v'_2}{\partial x \partial t} + \bar{v}_2 \frac{\partial^2 v'_2}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial f'}{\partial x} \quad (\text{A.46})$$

Substituindo as derivadas das velocidades dadas pelas Equações (A.25), (A.26), (A.27), (A.28), (A.29), (A.30) (resultado similar à Equação (A.32)):

$$(\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + 2(\rho_1 \bar{v}_1 + \rho_2 \bar{v}_2) \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t \partial x} + (\rho_1 \bar{v}_1^2 + \rho_2 \bar{v}_2^2) \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} = \frac{\partial f'}{\partial x} \quad (\text{A.47})$$

A perturbação da diferença líquida de momentos, forças de atrito com a parede e gravidade entre as fases não tem uma formulação geral conhecida, mas é razoável assumir que ela possui a dependência com as variáveis de escoamento como ditado pela Equação (A.44). Desta forma, numa abordagem variacional, pode-se dizer que a perturbação total é fruto da contribuição de cada perturbação original multiplicada pela respectiva derivada parcial da função  $f'$  (WALLIS, 1969):

$$f' = f'_\alpha \alpha' + f'_{v_1} v'_1 + f'_{v_2} v'_2 + f'_{\nabla\alpha} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \quad (\text{A.48})$$

Derivando a Equação (A.48) em relação ao espaço:

$$\frac{\partial f'}{\partial x} = f'_\alpha \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + f'_{v_1} \frac{\partial v'_1}{\partial x} + f'_{v_2} \frac{\partial v'_2}{\partial x} + f'_{\nabla\alpha} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} \quad (\text{A.49})$$

Substituindo a derivada das velocidades dadas pelas Equações (A.25) e (A.28) na Equação (A.49):

$$\frac{\partial f'}{\partial x} = \left[ \frac{f'_{v_1}}{(1 - \bar{\alpha})} - \frac{f'_{v_2}}{\bar{\alpha}} \right] \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \left[ f'_\alpha + \frac{f'_{v_1} \bar{v}_1}{(1 - \bar{\alpha})} - \frac{f'_{v_2} \bar{v}_2}{\bar{\alpha}} \right] \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + f'_{\nabla\alpha} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} \quad (\text{A.50})$$

A Equação (A.50) pode ser reescrita de forma mais familiar se estabelecermos uma forma alternativa para as variáveis que influenciam o termo  $f$  como ditado pela Equação (A.44), porém sem qualquer alteração na interpretação da física do fenômeno (WALLIS, 1969):

$$f = F(v_2, j_m, \alpha) \quad (\text{A.51})$$

Onde  $j_m$  representa a velocidade superficial da mistura:

$$j_m = (1 - \alpha)v_1 + \alpha v_2 \quad (\text{A.52})$$

As derivadas da Equação (A.48) podem ser reavaliadas através das derivadas totais da Equação (A.51) combinadas com a regra da cadeia:

$$f'_\alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial j} \frac{\partial j}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial j} (v_2 - v_1) \quad (\text{A.53})$$

$$f'_{v_1} = \frac{\partial F}{\partial j} \frac{\partial j}{\partial v_1} = \frac{\partial F}{\partial j} (1 - \alpha) \quad (\text{A.54})$$

$$f'_{v_2} = \frac{\partial F}{\partial v_2} + \frac{\partial F}{\partial j} \frac{\partial j}{\partial v_2} = \frac{\partial F}{\partial v_2} + \frac{\partial F}{\partial j} \alpha \quad (\text{A.55})$$

Substituindo as Equações (A.53), (A.54) e (A.55) na Equação (A.50):

$$\frac{\partial f'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial F}{\partial v_2} \left[ \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \overbrace{\left( \bar{v}_2 - \bar{\alpha} \frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha}}{\frac{\partial F}{\partial v_2}} \right)}^{V_w} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right] + f'_{v\alpha} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} \quad (\text{A.56})$$

A partir da regra do produto triplo ou da regra da cadeia de Euler, temos que:

$$\frac{\partial v_2}{\partial \alpha} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha}}{\frac{\partial F}{\partial v_2}} \quad (\text{A.57})$$

Retornando ao trecho da Equação (A.56) onde relacionaremos com a velocidade da onda cinemática  $V_w$  e substituindo a Equação (A.57), temos que:

$$v_2 - \alpha \frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha}}{\frac{\partial F}{\partial v_2}} = v_2 + \alpha \frac{\partial v_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha v_2) = \frac{\partial j_2}{\partial \alpha} = V_w \quad (\text{A.58})$$

Substituindo o resultado da Equação (A.58) na Equação (A.56), temos:

$$\frac{\partial f'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial F}{\partial v_2} \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + V_w \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right) + f'_{v\alpha} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} \quad (\text{A.59})$$

O resultado da Equação (A.59) é substituído na Equação (A.47):

$$(\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + 2(\rho_1 \bar{v}_1 + \rho_2 \bar{v}_2) \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t \partial x} + (\rho_1 \bar{v}_1^2 + \rho_2 \bar{v}_2^2 - f'_{V\alpha}) \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial F}{\partial v_2} \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + V_w \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.60})$$

Das Equações (A.54) e (A.55) podemos escrever:

$$\frac{\partial F}{\partial j} = \frac{f'_{v_1}}{(1 - \alpha)} \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial v_2} = \frac{f'_{v_2}}{\alpha} - \frac{f'_{v_1}}{(1 - \alpha)} \quad (\text{A.62})$$

Substituindo as Equações (A.61) e (A.62) na Equação (A.60):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + 2 \left[ \frac{(\rho_1 \bar{v}_1 + \rho_2 \bar{v}_2)}{(\rho_1 + \rho_2)} \right] \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t \partial x} + \left[ \frac{(\rho_1 \bar{v}_1^2 + \rho_2 \bar{v}_2^2 - f'_{V\alpha})}{(\rho_1 + \rho_2)} \right] \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} \\ + \left\{ \frac{\left[ \frac{f'_{v_2}}{\alpha} - \frac{f'_{v_1}}{(1 - \alpha)} \right]}{(\rho_1 + \rho_2)} \right\} \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + V_w \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t \partial x} + G \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2} + H \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + V_w \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.64})$$

Onde  $V_w$  é a velocidade da onda cinemática dada pela Equação (A.10) e  $V_0$  é a velocidade média ponderada pelas massas específicas de cada fase (similar à velocidade de mistura definida para o centro de massa):

$$V_0 = \frac{\rho_1 \bar{v}_1 + \rho_2 \bar{v}_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (\text{A.65})$$

E os coeficientes G e H são dados por:

$$G = \frac{\rho_1 \bar{v}_1^2 + \rho_2 \bar{v}_2^2 - f'_{V\alpha}}{\rho_1 + \rho_2} \quad (\text{A.66})$$

$$H = \frac{\frac{f'_{v_2}}{\alpha} - \frac{f'_{v_1}}{(1-\alpha)}}{\rho_1 + \rho_2} \quad (\text{A.67})$$

Considerando uma expansão modal para a fração de vazio como ditado pela Equação (4.2) e substituindo na equação (A.64):

$$(-\omega_n^2 + 2V_0 k_n \omega_n - k_n^2 G - H i \omega_n + H V_w i k_n) A_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} = 0 \quad (\text{A.68})$$

Somente teremos uma solução não trivial se:

$$-\omega_n^2 + 2V_0 k_n \omega_n - G k_n^2 - H i \omega_n + H V_w i k_n = 0 \quad (\text{A.69})$$

Como o número de onda e a frequência podem ser números complexos:

$$\omega_n = \omega_{nR} + i \omega_{nI} \quad (\text{A.70})$$

$$k_n = k_{nR} + i k_{nI} \quad (\text{A.71})$$

Substitui-se os resultados expressos nas Equações (A.70) e (A.71) na Equação (A.69):

$$\begin{aligned} & (-\omega_{nR}^2 + \omega_{nI}^2 + 2V_0 k_{nR} \omega_{nR} - 2V_0 k_{nI} \omega_{nI} - G k_{nR}^2 + G k_{nI}^2 + H \omega_{nI} \\ & \quad - H V_w k_{nI}) \\ & + i(-2\omega_{nR} \omega_{nI} + 2V_0 k_{nR} \omega_{nI} + 2V_0 k_{nI} \omega_{nR} - 2G k_{nR} k_{nI} \\ & \quad - H \omega_{nR} + H V_w k_{nR}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

As partes real e imaginária da Equação (A.72) têm de ser nulas, o que nos dá 2 Equações, porém com 4 incógnitas:

$$-\omega_{nR}^2 + \omega_{nI}^2 + 2V_0 k_{nR} \omega_{nR} - 2V_0 k_{nI} \omega_{nI} - G k_{nR}^2 + G k_{nI}^2 + H \omega_{nI} - H V_w k_{nI} = 0 \quad (\text{A.73})$$

$$-2\omega_{nR} \omega_{nI} + 2V_0 k_{nR} \omega_{nI} + 2V_0 k_{nI} \omega_{nR} - 2G k_{nR} k_{nI} - H \omega_{nR} + H V_w k_{nR} = 0 \quad (\text{A.74})$$

Será considerado apenas o termo propagante da onda, o que implica que a parte imaginária do número de onda será nula. Como há interesse em modos de onda propagantes, isso significa que não seriam atenuados nem amplificados, portanto situa-se próximo à curva neutra. Neste caso, de acordo com o Teorema de Gaster (SCHMID; HENNINGSON, 2001) as análises espaciais e temporais seriam equivalentes, portanto não é necessário demonstrar para o caso de decaimento espacial. A partir destas premissas e da Equação (4.2) têm-se:

$$\alpha' = \sum_n A_n e^{\omega_{nI} t} e^{i(k_{nR} x - \omega_{nR} t)} \quad (\text{A.75})$$

Substituindo a Equação (A.75) nas Equações (A.73) e (A.74):

$$\omega_{nR}^2 - 2V_0 k_{nR} \omega_{nR} - H \omega_{nI} - \omega_{nI}^2 + G k_{nR}^2 = 0 \quad (\text{A.76})$$

$$\omega_{nR} + \frac{2}{H} \omega_{nR} \omega_{nI} - \frac{2V_0 k_{nR}}{H} \omega_{nI} - V_w k_{nR} = 0 \quad (\text{A.77})$$

A partir das Equações (A.77) e (4.4), temos:

$$\omega_{nI} = -\frac{H}{2} \left( \frac{V_w - c_p}{V_0 - c_p} \right) \quad (\text{A.78})$$

Onde o decaimento é dado pelo quociente entre as velocidades relativas das ondas em relação à onda cinemática e a velocidade de mistura para o centro de massa, resultado similar ao encontrado na literatura (WALLIS, 1969). É interessante observar que só não há decaimento ou amplificação da onda de fração de vazios se a velocidade de fase  $c_p$  for igual à da onda

cinemática  $V_w$ . Substituindo a Equação (A.78) na (A.76) dividida pela parte real do número de onda  $k_{nR}$ , temos:

$$(V_0 - c_p)^4 + \left[ \left( \frac{H}{2k_{nR}} \right)^2 - (V_0^2 - G) \right] (V_0 - c_p)^2 - \left[ \left( \frac{H}{2k_{nR}} \right)^2 (V_w - V_0)^2 \right] = 0 \quad (\text{A.79})$$

A equação (A.79) pode ser simplificada se considerarmos a velocidade relativa da onda em relação à velocidade de mistura  $v_r$  e dos coeficientes listados abaixo:

$$v_r = (V_0 - c_p)^2 \quad (\text{A.80})$$

$$a = \left( \frac{H}{2k_{nR}} \right)^2 \quad (\text{A.81})$$

$$b = V_0^2 - G \quad (\text{A.82})$$

$$d = (V_w - V_0)^2 \quad (\text{A.83})$$

A partir das Equações (A.80), (A.81), (A.82) e (A.83), pode-se reescrever a Equação (A.79):

$$v_r^2 + (a - b)v_r - (ad) = 0 \quad (\text{A.84})$$

Com a seguinte solução:

$$v_r = \frac{(b - a)}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2 + 4ad}{4}} \quad (\text{A.85})$$

Que pode ser reescrita:

$$c_p = V_0 \pm \sqrt{\frac{(b - a)}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2 + 4ad}{4}}} \quad (\text{A.86})$$

Onde  $V_w$ ,  $V_o$ ,  $G$  e  $H$  são dados pelas Equações (A.10), (A.65), (A.66) e (A.67) respectivamente. Apesar do modelo descrito acima ser geral, sem distinção por padrões de escoamento, a velocidade de fase  $c_p$  depende dos termos relativos ao balanço de forças e momentos entre as fases que não possuem modelos fechados generalistas e variam de padrão a padrão de escoamento. Há modelos para estas forças nos regimes de fases separadas para os padrões anular e estratificado (SHOHAM, 2005b; WALLIS, 1969), porém é um tema em aberto para outros padrões, portanto, não é possível obter um modelo fechado para a velocidade das fases de uma forma geral.

Por fim, como este trabalho avalia o padrão golfadas, parte-se do princípio que o trem de onda de pulsos quadrados é uma onda estável observada experimentalmente. Logo, a partir do resultado expresso na Equação (A.78), para garantir tal estabilidade, a velocidade de fase deve ser igual à da onda cinemática. Além do mais, de acordo com as Equações (A.86), (A.81), (A.82) e (A.83) a velocidade de fase é uma função do número de onda já que o termo  $H$ , que representa o balanço de forças no termo fonte não é nulo, portanto o coeficiente  $a$  depende do número de onda, logo, a onda cinemática é dispersiva.



## APÊNDICE B. DETECÇÃO DE ATRASO EM SINAIS DE PRESSÃO

Esta seção é dedicada a avaliação do problema da superposição de um sinal com atraso, similar aos problemas de eco, além dos algoritmos para detectar tal atraso e identificá-lo. A análise é baseada na propriedade do atraso puro da transformada de Fourier (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975; PROAKIS; MANOLAKIS, 2007):

$$F\{x(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} X(f) \quad (\text{B.1})$$

A Transformada de Fourier de um sinal com um atraso puro, implica na modulação do espectro do sinal original por uma exponencial em função deste atraso. Como a exponencial possui norma unitária, há alteração somente da fase do espectro. Seja um sinal simétrico no tempo:

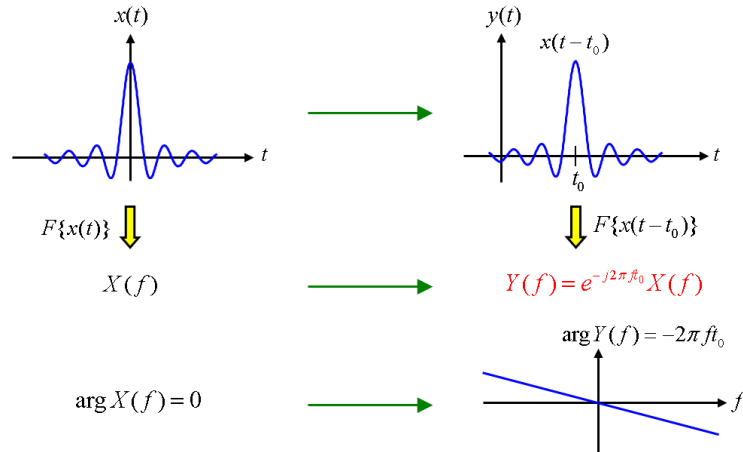
$$x(t) = x(-t) \quad (\text{B.2})$$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} \Leftrightarrow \angle X(f) = 0 \quad (\text{B.3})$$

A Transformada de Fourier de um sinal simétrico no tempo (função de autocorrelação, por exemplo) é um número real puro e, portanto, possui fase nula (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975; PROAKIS; MANOLAKIS, 2007), logo, o atraso puro de um sinal simétrico no tempo como discutido acima, por ser representado por uma exponencial complexa que possui norma unitária, provoca somente uma mudança de fase deste sinal que a priori é nula, sendo que tal fase apresenta um comportamento linear com relação à frequência, como representado na Figura B.1. Desta forma, o atraso pode ser interpretado como um atraso puro se a fase for uma reta (inclinação constante), ou podemos simplesmente ver a inclinação local da fase, por bandas de frequência, como o atraso do grupo para casos dispersivos. Se um modo de onda tiver comportamento não dispersivo, terá uma característica de atraso puro e fase linear. Caso contrário, terá característica dispersiva e não pode ser vista como atraso puro por depender localmente da frequência. Dessa maneira, é possível que algumas bandas de frequência tenham fase linear, ou seja não dispersiva, e outras com fase não linear, ou seja dispersiva (SHIN; HAMMOND, 2008):

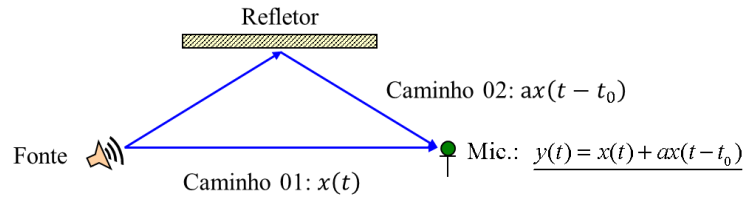
$$-\frac{d\phi}{d\omega} = t_0 \text{ (atraso puro)} \quad (\text{B.4})$$

$$-\frac{d\phi}{d\omega} = F(\omega) \text{ atraso de grupo} \quad (\text{B.5})$$



**Figura B.1.-** Sinal real e simétrico no tempo com atraso puro (SHIN; HAMMOND, 2008) .

Desta forma, o problema de eco, pode ser formulado da seguinte forma simplificada:



**Figura B.2 –** Formulação do problema de eco (SHIN; HAMMOND, 2008)

$$y(t) = x(t) + ax(t - t_0) \quad (\text{B.6})$$

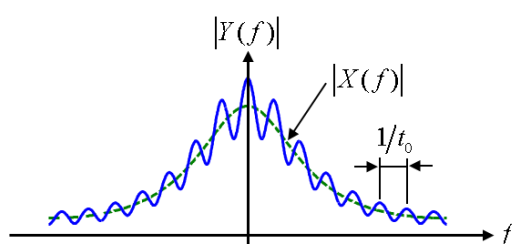
Onde  $a$  representa a atenuação ( $|a| \leq 1$ ) do sinal  $x(t)$  e  $t_0$  representa o atraso. Fazendo a Transformada de Fourier da Equação (B.6):

$$Y(f) = \overbrace{(1 + ae^{-j2\pi f t_0})}^{H(f)} X(f) \quad (\text{B.7})$$

Multiplicando a Equação (B.7) pelo seu complexo conjugado e tirando a raiz para obter a magnitude:

$$|Y(f)| = \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos(2\pi f t_0)} |X(f)| \quad (\text{B.8})$$

Logo, a Equação (B.8) indica que temos um espectro cuja magnitude é a do sinal original modulada por uma cossenóide que possui a seguinte forma:



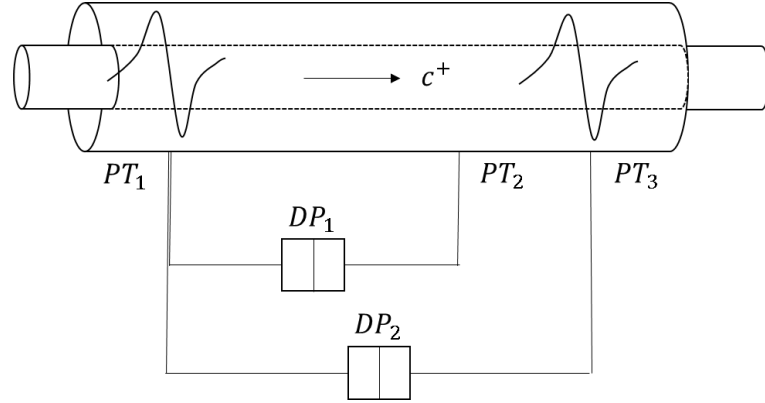
**Figura B.3** – Magnitudes do sinal e sobreposição com atraso (SHIN; HAMMOND, 2008)

Ou seja, o atraso puro pode ser recuperado a partir do período da modulação sobre o espectro original do sinal. Deve-se notar que a modulação induz uma série de picos espúrios no espectro original que podem ser confundidos com harmônicas, de certa forma, este resultado explica o espectro observado por Mendes (2012) ilustrado na Figura 2.8 onde percebe-se uma série de picos com uma aparente periodicidade. No domínio do tempo, o atraso puro pode ser visto como uma operação de convolução com a distribuição Delta de Dirac, equivalente à transformada inversa da exponencial, ou seja, o sinal final é fruto da convolução do original com a seguinte função resposta ao impulso unitário:

$$h(t) = \delta(t) + a\delta(t - t_0) \quad (\text{B.9})$$

Ao compararmos o discutido acima com o problema de propagação das ondas de pressão em escoamentos multifásicos e sua relação com os sinais de pressão diferencial, há grandes diferenças que devem ser discutidas. Como fora citado nas seções anteriores, há ondas com velocidades de propagação diferentes e dependentes do número de onda (ondas dispersivas), portanto, não teremos um problema de atraso simples como discutido acima. Desta forma, temos de averiguar quais destas ondas possuem mais energia sendo a mais dominante e em que banda de frequências isso ocorre.

Outra diferença importante é que, neste trabalho, o sinal de pressão absoluta não está disponível, portanto deve-se avaliar como ficam as propriedades supracitadas para uma sonda de pressão diferencial. Como para o arranjo experimental é muito mais cômodo trabalhar com sondas de pressão diferencial, para tal, propõe-se o arranjo representado na Figura B.4.



**Figura B.4.-** Representação do arranjo experimental utilizando duas sondas de pressão diferencial em três tomadas.

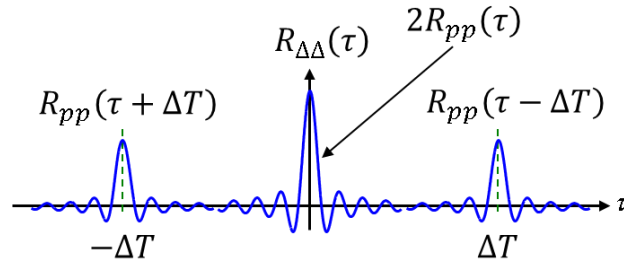
Onde  $PT_1$ ,  $PT_2$  e  $PT_3$  são as tomadas de pressão em ordem crescente com o sentido do escoamento,  $DP_1$  e  $DP_2$  representam as sondas de pressão diferencial entre as tomadas 1-2 e 1-3 respectivamente. Considerando a propagação de ondas de pressão como discutido na Seção 4.3, assume-se que a pressão diferencial possui o formato ditado pela Equação (4.49), portanto, a auto correlação da pressão diferencial é definida como a esperança do sinal multiplicado por ele mesmo atrasado de  $\tau$  (lag ou atraso) (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975; PROAKIS; MANOLAKIS, 2007):

$$\begin{aligned} R_{\Delta\Delta}(\tau) &= E\{\Delta p'(t)\Delta p'(t + \tau)\} \\ &= E\{(p'(t) - p'(t + \Delta T) + \eta'(t))(p'(t + \tau) - p'(t + \tau + \Delta T) + \eta'(t + \tau))\} \end{aligned} \quad (B.10)$$

Assumindo que o ruído  $\eta'$  é estatisticamente independente da onda de pressão:

$$R_{\Delta\Delta}(\tau) = 2R_{pp}(\tau) - R_{pp}(\tau + \Delta T) - R_{pp}(\tau - \Delta T) + R_{\eta\eta}(\tau) \quad (B.11)$$

Onde  $R_{pp}(\tau)$  é a autocorrelação da pressão absoluta na primeira tomada. O resultado da Equação (B.11) pode ser visualizado na Figura B.5 (excluído o ruído):



**Figura B.5** – Comportamento da auto correlação da pressão diferencial (SHIN; HAMMOND, 2008)

Em princípio, é possível estimar o atraso a partir da análise dos picos da função de auto correlação como exibido na Figura B.5, porém esta abordagem somente seria efetiva se o sinal fosse do tipo banda larga, como um impulso com atraso puro. Como o sinal base pode ser periódico, haverá uma série de picos que não se devem ao atraso, mas sim à periodicidade, o que pode causar enganos na hora de decidir se um pico se deve ao atraso ou à periodicidade. Além do mais, como o problema se trata de uma guia de onda não linear e dispersiva, o *match* na auto correlação pode não ser perfeito, o que não levaria a um pico pronunciado e identificável na auto correlação como os exibidos na Figura B.5. Por isso, a análise no domínio da frequência torna-se particularmente interessante, pois pode-se dividir o sinal por bandas de frequência e avaliar se as hipóteses levantadas são coerentes para cada banda. Fazendo a Transformada de Fourier da Equação (B.11):

$$S_{\Delta\Delta}(f) = 2[1 - \cos(2\pi f \Delta T)] S_{pp}(f) + S_{\eta\eta}(f) \quad (\text{B.12})$$

Todas as componentes da equação (B.12) possuem fase nula, pois são os espectros das auto correlações dos sinais de pressão diferencial ou da pressão na primeira tomada e as partes imaginárias das duas exponenciais complexas se anulam, restando somente a parte real que modula a PSD da pressão na primeira tomada. A Equação (B.12) será reescrita para cada sonda de pressão diferencial representada na Figura B.4:

$$S_{\Delta_1\Delta_1}(f) = 2[1 - \cos(2\pi f \Delta T_1)] S_{pp}(f) + S_{\eta\eta}(f) \quad (\text{B.13})$$

$$S_{\Delta_2\Delta_2}(f) = 2[1 - \cos(2\pi f \Delta T_2)] S_{pp}(f) + S_{\eta\eta}(f) \quad (\text{B.14})$$

Onde os atrasos  $\Delta T_1$  e  $\Delta T_2$  representam os tempos de trânsito da onda de pressão entre as tomadas 1-2 e 1-3 respectivamente. As pressões diferenciais como exibidas na Figura B.4 podem ser escritas a partir da Equação (4.49):

$$\Delta p'_1(t) = [p'(t) - p'(t + \Delta T_1)] + \eta'(t) \quad (\text{B.15})$$

$$\Delta p'_2(t) = [p'(t) - p'(t + \Delta T_2)] + \eta'(t) \quad (\text{B.16})$$

A correlação cruzada entre os dois sinais de pressão diferencial dados pelas Equações (B.15) e (B.16) pode ser escrita:

$$\begin{aligned} R_{\Delta_1\Delta_2}(\tau) &= E\{\Delta p'_1(t)\Delta p'_2(t + \tau)\} \\ &= E\{(p'(t) - p'(t + \Delta T_1) + \eta'(t))(p'(t + \tau) \\ &\quad - p'(t + \tau + \Delta T_2) + \eta'(t + \tau))\} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Assumindo que o ruído é estatisticamente independente da onda de pressão:

$$\begin{aligned} R_{\Delta_1\Delta_2}(\tau) &= R_{pp}(\tau) - R_{pp}(\tau + \Delta T_2) - R_{pp}(\tau - \Delta T_1) \\ &\quad + R_{pp}(\tau + \Delta T_2 - \Delta T_1) + R_{\eta\eta}(\tau) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Fazendo a transformada de Fourier da Equação (B.18), tem-se PSD cruzada (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975; PROAKIS; MANOLAKIS, 2007):

$$S_{\Delta_1\Delta_2}(f) = [1 - e^{j2\pi f\Delta T_2} - e^{-j2\pi f\Delta T_1} + e^{j2\pi f(\Delta T_2 - \Delta T_1)}]S_{pp}(f) + S_{\eta\eta}(f) \quad (\text{B.19})$$

Se  $\Delta T_2 = \Delta T_1$ , a Equação (B.19) se iguala à auto correlação representada pela Equação (B.12). Como a PSD  $S_{pp}(f)$  representa a transformada de Fourier da auto correlação da onda de pressão, trata-se de um número real puro, portanto a fase de  $S_{\Delta_1\Delta_2}(f)$  deve-se integralmente às exponenciais complexas indicadas na Equação (B.19) que dependem somente do atraso, portanto, uma forma de se estimá-lo é através da fase da PSD da correlação cruzada, porém a combinação de exponenciais com atrasos diferentes não permite a aplicação direta da

Equação de Euler e obtenção trivial de uma expressão analítica para a fase. Logo, a partir da Equação (B.19):

$$\angle S_{\Delta_1 \Delta_2}(f) = \angle [1 - e^{j2\pi f \Delta T_2} - e^{-j2\pi f \Delta T_1} + e^{j2\pi f (\Delta T_2 - \Delta T_1)}] \quad (\text{B.20})$$

Deve-se escrever a combinação das exponenciais da Equação (B.20) separando magnitude e fase visando a obtenção de uma expressão analítica para o atraso, portanto manipula-se algebricamente a Equação (B.20) utilizando as seguintes definições. Sendo  $L_{s1}$  e  $L_{s2}$  as distâncias entre as tomadas de pressão das sondas diferenciais, admitindo que a velocidade de fase seja constante entre as sondas para uma dada frequência, têm-se:

$$c_p = \frac{L_{s2}}{\Delta T_2} = \frac{L_{s1}}{\Delta T_1} \quad (\text{B.21})$$

Logo:

$$\Delta T_2 = \left( \frac{L_{s2}}{L_{s1}} \right) \Delta T_1 = \gamma \Delta T_1 \quad (\text{B.22})$$

Onde  $\gamma$  é a razão de aspecto entre as distâncias das tomadas de pressão:

$$\gamma = \frac{L_{s2}}{L_{s1}} \quad (\text{B.23})$$

Substituindo o definido pela Equação (B.22) na Equação (B.19) e manipulando-a algebricamente:

$$S_{\Delta_1 \Delta_2}(f) = [4 \sin(\pi f \gamma \Delta T_1) \sin(\pi f \Delta T_1) e^{j\pi f (\gamma - 1) \Delta T_1}] S_{pp}(f) + S_{\eta\eta}(f) \quad (\text{B.24})$$

Como a auto correlação da onda de pressão absoluta na primeira tomada não está disponível, é conveniente reescrever a Equação (B.24) utilizando a auto correlação da pressão diferencial na primeira sonda. Portanto, a partir da Equação (B.13):

$$S_{pp}(f) = \frac{1}{2[1 - \cos(2\pi f \Delta T_1)]} [S_{\Delta_1 \Delta_1}(f) - S_{\eta\eta}(f)] \quad (\text{B.25})$$

Substituindo a Equação (B.25) na Equação (B.24):

$$S_{\Delta_1 \Delta_2}(f) = \frac{[4 \sin(\pi f \gamma \Delta T_1) \sin(\pi f \Delta T_1) e^{j\pi f (\gamma-1) \Delta T_1}]}{2[1 - \cos(2\pi f \Delta T_1)]} [S_{\Delta_1 \Delta_1}(f) - S_{\eta\eta}(f)] + S_{\eta\eta}(f) \quad (\text{B.26})$$

A Equação (B.26) pode ser reescrita na forma:

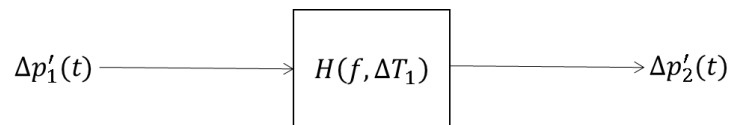
$$S_{\Delta_1 \Delta_2}(f) = H(f, \Delta T_1) S_{\Delta_1 \Delta_1}(f) + G(f, \Delta T_1) S_{\eta\eta}(f) \quad (\text{B.27})$$

Onde:

$$H(f, \Delta T_1) = \left[ \frac{\sin(\pi f \gamma \Delta T_1)}{\sin(\pi f \Delta T_1)} \right] e^{j2\pi f \left[ \frac{(\gamma-1)\Delta T_1}{2} \right]} \quad (\text{B.28})$$

$$G(f, \Delta T_1) = 1 - H(f, \Delta T_1) \quad (\text{B.29})$$

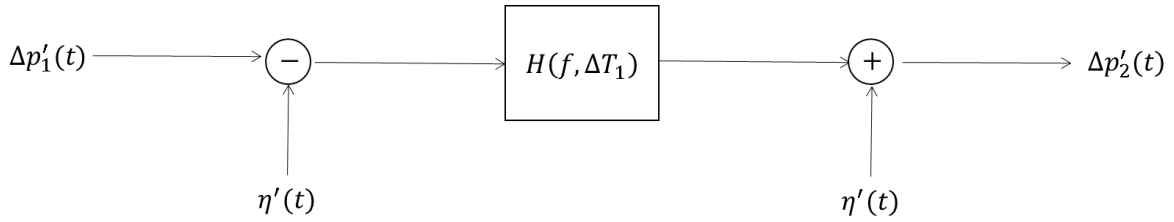
A Equação (B.28) representa a FRF  $H(f, \Delta T_1)$  que relaciona os espectros dos sinais de pressão diferencial nas duas sondas.



**Figura B.6** – Diagrama de bloco dos sinais de pressão diferencial

Enquanto que a Equação (B.27) representa o comportamento destes sinais quando submetidos aos ruídos induzidos pela turbulência e de medição, que pode ser sumarizado pelo diagrama de blocos da Figura B.7





**Figura B.7** – Diagrama de bloco dos sinais de pressão diferencial com ruído turbulento

Com essa formulação, pode-se definir uma função de coerência ordinária que pode ser usada para verificar se as hipóteses usadas na derivação do modelo são coerentes, em diferentes bandas de frequência. A função de coerência varia entre 0 e 1 e valores próximos à unidade indicam que a hipótese de linearidade utilizada é atendida e a formulação proposta pode ser utilizada. Desvios da linearidade podem indicar grande influência do ruído de medição ou de outros fatores físicos não previstos no modelo como turbulência, ressonância ou efeitos de não-linearidade (ARRUDA; HUALLPA, 2008).

$$C_{\Delta_2\Delta_1}(f) = \frac{S_{\Delta_2\Delta_1}(f)S_{\Delta_2\Delta_1}^*(f)}{S_{\Delta_1\Delta_1}(f)S_{\Delta_2\Delta_2}(f)} \quad (\text{B.30})$$

Pode-se estimar o atraso a partir da análise da fase da correlação cruzada como representado pela Equação (B.24) ou através da FRF representada na Equação (B.28). Ademais, a vantagem de utilizar a fase é que esta é um estimador não enviesado para o atraso pois o ruído não impacta a fase (SHIN; HAMMOND, 2008). Ou seja:

$$\angle H(f, \Delta T_1) = \angle S_{\Delta_1\Delta_2}(f) = 2\pi f \left[ \frac{(\gamma - 1)\Delta T_1}{2} \right] = 2\pi f \Delta T' \quad (\text{B.31})$$

Onde  $\Delta T'$  é o atraso aparente:

$$\Delta T' = \frac{(\gamma - 1)\Delta T_1}{2} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{2} \quad (\text{B.32})$$

A fase é uma função linear com o atraso puro, portanto basta fazer um ajuste de uma reta para estimar o tempo de trânsito da onda de pressão em uma região de fase linear ou calcular a reta tangente à curva da fase para o caso dispersivo. O atraso identificado equivale à metade da diferença entre os tempos de trânsito das duas sondas de pressão diferencial. A partir

da dependência explicitada pelo diagrama de blocos da Figura B., a FRF pode ser estimada através dos estimadores clássicos  $H_1$  e  $H_2$  (ARRUDA; HUALLPA, 2008):

$$H_1(f, \Delta T_1) = \frac{S_{\Delta_1 \Delta_2}(f)}{S_{\Delta_1 \Delta_1}(f)} \quad (\text{B.33})$$

$$H_2(f, \Delta T_1) = \frac{S_{\Delta_2 \Delta_2}(f)}{S_{\Delta_2 \Delta_1}(f)} \quad (\text{B.34})$$

Uma das vantagens de se determinar o problema em termos desses estimadores é que eles possuem propriedades estatísticas bem conhecidas. Dada a dependência com o ruído turbulento explicitada pelo diagrama de blocos da Figura B.7 e considerando que este ruído é estatisticamente independente das pressões diferenciais lidas, têm-se que (ARRUDA; HUALLPA, 2008):

$$|H_1(f, \Delta T_1)| \leq |H(f, \Delta T_1)| \leq |H_2(f, \Delta T_1)| \quad (\text{B.35})$$

Portanto  $H_1(f, \Delta T_1)$  e  $H_2(f, \Delta T_1)$  são os limites inferior e superior de  $H(f, \Delta T_1)$ , porém, como trata-se de um problema de detecção de atraso, a fase que possui a informação mais importante.

Portanto, este trabalho se limitará a análise da fase do espectro da correlação cruzada e à função de coerência ordinária para avaliar a velocidade de propagação de ondas em função a frequência, busca-se uma região de fase aproximadamente linear ou de alta coerência, estima-se o atraso e a partir deste estima-se a velocidade da onda.

## APÊNDICE B.1 Espectrograma

O espectrograma é uma representação visual do espectro de um sinal não estacionário, ou seja, cujo conteúdo espectral varia com o tempo. Neste trabalho, os espectrogramas foram construídos a partir da técnica *Short Time Fourier Transform* (STFT), que consiste resumidamente em dividir o sinal em segmentos, para cada segmento calcula-se a Transformada de Fourier que são então sobrepostas ao longo do tempo segmento a segmento.

Matematicamente, a STFT consiste em realizar a transformada de Fourier do sinal objeto da análise  $x(t)$  multiplicado por uma função janela  $w(t)$  não nula por um período finito no tempo que translada ao longo do tempo por  $\tau$  segundos como representado na Equação (B.36) (ARRUDA; HUALLPA, 2008).

$$\text{STFT}\{x(t)\}(\tau, \omega) = X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{B.36})$$

## APÊNDICE B.2 Envelope de um Sinal

A Transformada de Fourier  $X(\omega)$  de um sinal real  $x(t)$  possui simetria Hermitiana, ou seja, o espectro para frequências negativas é o complexo conjugado do espectro para as frequências positivas como representado na Equação (B.37).

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \quad (\text{B.37})$$

Desta forma, pode-se propor um sinal complexo  $s(t)$  denominado sinal analítico cujo espectro  $S(\omega)$  não apresente esta redundância em sua representação como exibido na Equação (B.38).

$$S(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \text{se } \omega > 0 \\ X(\omega) & \text{se } \omega = 0 \\ 0 & \text{se } \omega < 0 \end{cases} \quad (\text{B.38})$$

A Equação (B.38) pode ser reescrita a partir do uso da função sinal  $\text{sgn}(\omega)$ :

$$S(\omega) = X(\omega) + \text{sgn}(\omega)X(\omega) \quad (\text{B.39})$$

Onde:

$$\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega > 0 \\ 0 & \text{se } \omega = 0 \\ -1 & \text{se } \omega < 0 \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

A partir da Transformada de Fourier inversa da Equação (B.39)

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega) + \text{sgn}(\omega)X(\omega)\} \quad (\text{B.41})$$

Onde  $*$  simboliza a operação de convolução:

$$s(t) = x(t) + \mathcal{F}^{-1}\{\text{sgn}(\omega)\} * x(t) \quad (\text{B.42})$$

A Transformada de Fourier inversa da função sinal  $\text{sgn}(\omega)$  é o kernel de Cauchy dado por:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\text{sgn}(\omega)\} = j \frac{1}{\pi t} \quad (\text{B.43})$$

Portanto:

$$s(t) = x(t) + j \left[ \frac{1}{\pi t} * x(t) \right] = x(t) + jH_x(t) \quad (\text{B.44})$$

Onde  $H_x(t)$  representa a Transformada de Hilbert de  $x(t)$  (ARRUDA; HUALLPA, 2008):

$$H_x(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (\text{B.45})$$

Sendo o sinal  $x(t)$  causal (definido somente para  $t > 0$ ) e considerando a integral imprópria:

$$H_x(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\varsigma}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (\text{B.46})$$

O sinal analítico complexo  $s(t)$  pode ser representado:

$$s(t) = x(t) + jH_x(t) = a(t)e^{j\varphi(t)} \quad (\text{B.47})$$

Onde  $a(t)$  é a amplitude do sinal analítico complexo que equivale ao envelope buscado e  $\varphi(t)$  a fase instantânea do sinal (ARRUDA; HUALLPA, 2008):

$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + H_x^2(t)} \quad (\text{B.48})$$